

ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ing. Luisa Leonor Rivero

PROF. TITULAR CÁTEDRA ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

FACULTAD DE INGENIERIA DE OBERA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

Colección: Cuadernos de Cátedra

Contenido

VECTORES GEOMÉTRICOS	10
CONCEPTO DE VECTOR GEOMÉTRICO.....	10
MÓDULO DE UN VECTOR:.....	10
CLASIFICACIÓN DE VECTORES.....	10
VECTORES EN \mathbb{R}^2	11
COMPONENTES DE UN VECTOR.....	12
MODULO DE UN VECTOR.....	12
VECTOR UNITARIO O VERSOR	13
VERSORES EN EL PLANO	13
VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA.....	13
ANGULOS DIRECTORES.....	14
OPERACIONES	14
MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES.....	15
CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE DOS VECTORES	16
PRODUCTO ESCALAR O PUNTO	16
PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES ...	16
ANGULO ENTRE DOS VECTORES	17
VECTORES ORTOGONALES	17
PROYECCIÓN ESCALAR.....	17
PROYECCIÓN VECTORIAL	18
TRABAJO PRÁCTICO: VECTORES EN \mathbb{R}^2	21
VECTORES GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO \mathbb{R}^3	23
MODULO DE UN VECTOR.....	23
COMPONENTES DE UN VECTOR.....	23
VERSORES EN EL ESPACIO	25
ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES	25
ÁNGULOS DIRECTORES Y COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR.....	25
COMPONENTES DEL VECTOR SUMA O DIFERENCIA.....	27
COMPONENTES DEL VECTOR λa	27
VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA.....	28
DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UN VECTOR	29

PRODUCTO ESCALAR	29
PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES	29
VECTORES ORTOGONALES.....	30
PROYECCION ESCALAR – PROYECCIÓN VECTORIAL	30
PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES	32
PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES DADOS POR SUS COMPONENTES:.....	32
PRODUCTO MIXTO	33
INTERPRETACION GEOMETRICA	34
VECTORES COPLANARES	34
TRABAJO PRÁCTICO VECTORES EN R^3	35
LA ECUACION DEL PLANO	38
ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO	38
ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO	38
ECUACIÓN SEGMENTARIA DEL PLANO	40
ECUACIÓN DEL PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS.....	41
CASOS PARTICULARES	42
ECUACIONES VECTORIALES PARAMETRICAS	43
ECUACION NORMAL DEL PLANO	45
ANGULO ENTRE DOS PLANOS.....	46
CONDICIÓN DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.....	46
TRABAJO PRÁCTICO: EL PLANO	47
LA ECUACIÓN DE LA RECTA EN R^3	52
ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA.....	52
ECUACIONES CARTESIANAS PAREMETRICAS.....	52
ECUACIONES SIMETRICAS (4)	53
COSENOS DIRECTORES DE UNA RECTA.....	54
POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA EN R^3 -RECTAS PARALELAS A LOS EJES COORDENADOS.....	55
RECTAS PARALELAS A LOS PLANOS COORDENADOS	56
ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS.....	58
CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS	58
CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE RECTAS	59
ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA EN R^2	60
TRABAJO PRÁCTICO: LA RECTA	62

POSICIÓN Y MAGNITUD	64
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS	64
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS	65
INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO	66
INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS.....	68
RECTA COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS	68
DISTANCIA DE UN PLANO AL ORIGEN DE COORDENADAS	70
DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO	70
DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS	72
DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.....	74
DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS	75
TRABAJO PRÁCTICO - POSICIÓN Y MAGNITUD	76
LAS CÓNICAS	82
.....	82
CIRCUNFERENCIA	85
DEFINICIÓN:	85
ECUACIÓN CARTESIANA:	85
CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES PUNTOS	86
ECUACIÓN CUADRÁTICA:	87
POSICION RELATIVA ENTRE RECTA Y CIRCUNFERENCIA	88
OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS COMUNES A UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA	90
TRABAJO PRÁCTICO: CIRCUNFERENCIA.....	91
ELIPSE	93
DEFINICIÓN:	93
ELEMENTOS DE LA ELIPSE (Fig. 1).....	93
CONSTRUCCION DE LA ELIPSE	93
TRAZADO DE LA ELIPSE CON EL USO DEL COMPÁS.....	94
ECUACION CANONICA DE LA ELIPSE.....	94
PROPIEDADES DE LA ELIPSE CON CENTRO $C(0,0)$	98
EXCENRICIDAD DE LA ELIPSE	98
ECUACIÓN CANONICA DE LA ELIPSE CON CENTRO $C(h,k)$ Y EJE PRINCIPAL PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS.	99
TRABAJO PRÁCTICO: ELIPSE	102
HIPERBOLA	105

DEFINICION:	105
ELEMENTOS DE LA HIPERBOLA	105
CONSTRUCCIÓN DE LA HIPERBOLA.....	105
ECUACIÓN CANONICA DE LA HIPERBOLA	106
PROPIEDADES DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO (0,0).....	107
ECUACIÓN CANONICA CON CENTRO $C(h, k)$ Y EJE PRINCIPAL PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS.	110
TRABAJO PRÁCTICO LA HIPERBOLA.....	114
PARABOLA	116
ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA:.....	116
CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA.....	116
ECUACIÓN CANONICA DE LA PARABOLA	117
ECUACIÓN CANONICA CON VÉRTICE $V(h, k)$, EJE FOCAL PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS	119
IMPORTANCIA DEL TEMA	122
TRABAJO PRÁCTICO LA PARABOLA	123
AUTOEVALUACIO	125
CUADRICAS.....	126
DEFINICIÓN.....	126
FORMAS REDUCIDAS.....	126
SUPERFICIES DE REVOLUCION	126
PROCEDIMIENTO PARA ANALIZAR UNA SUPERFICIE	127
ESTUDIO DE CADA SUPERFICIE CUADRICA CON CENTRO $C(0,0,0)$	128
ELIPSOIDE.....	128
HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA.....	130
HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS	132
CONO.....	134
SUPERFICIES CILINDRICAS	135
CUÁDRICAS SIN CENTRO DE SIMETRÍA	136
PARABOLOIDE ELÍPTICO.....	136
PARABOLOIDE HIPERBOLICO	138
TRABAJO PRACTICO CUADRICAS	140
ESPACIOS VECTORIALES.....	152
Introducción:	152

DEFINICIÓN:	152
SUBESPACIOS DE ESPACIOS VECTORIALES	154
INTERSECCIÓN ENTRE SUBESPACIOS VECTORIALES.....	156
TRABAJO PRACTICO ESPACIO Y SUBESPACIO VECTORIAL	157
COMBINACIÓN LINEAL.....	159
CONJUNTO GENERADOR.....	162
ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES	162
CONJUNTO GENERADOR LINEALMENTE INDEPENDIENTE.....	164
RELACION CON UN SISTEMA HOMOGENEO DE ECUACIONES.....	165
COMO DETERMINAR SI UN CONJUNTO GENERADOR ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O INDEPENDIENTE.....	167
RELACION ENTRE INDEPENDENCIA LINEAL Y CONJUNTO GENERADOR.....	168
TRABAJO PRACTICO COMBINACION LINEAL, ESPACIO GENERADO, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL	169
BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL	174
DEFINICIÓN DE BASE.....	174
BASE PARA UN SUBESPACIO DE \mathbb{R}^3	175
DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL	176
TRABAJO PRACTICO BASE y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL.....	178
MATRIZ DE COORDENADAS - CAMBIO DE BASE.....	180
CAMBIO DE BASE	183
CAMBIO DE BASE ESTANDAR A OTRA BASE	183
MATRICES DE CAMBIO DE BASE – MATRIZ DE TRANSICIÓN	184
MÉTODO DE MATRIZ INVERSA PARA CALCULAR LA MATRIZ DE CAMBIO DE BASE	186
MATRIZ DE COORDENADAS DEL VECTOR v EN TODAS LAS BASES.....	188
TRABAJO PRÁCTICO: MATRIZ DE COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE	189
INTRODUCCIÓN A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES	194
TRANSFORMACIONES LINEALES	194
PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES	196
MATRIZ DE TRANSFORMACION.....	199
ISOMETRIAS.....	203
DEFINICIÓN	203
PROPIEDADES	203

ROTACIÓN	204
TRABAJO PRÁCTICO - ISOMETRIA.....	209
AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.....	210
DEFINICIÓN:.....	210
AUTOVALOR ASOCIADO A UNA MATRIZ	210
ESPACIO CARACTERÍSTICO:	212
MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA.....	213
MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA	213
PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR VALORES CARACTERÍSTICOS Y VECTORES CARACTERÍSTICOS	213
TRABAJO PRACTICO AUTOVALORES Y AUTOVECTORES	217
MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES	219
MATRICES SEMEJANTES.....	219
DIAGONALIZACIÓN	220
MATRIZ DIAGONALIZANTE O DE PASO “C”	220
MATRICES SIMÉTRICAS Y DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL	224
TRABAJO PRACTICO MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACION	227
ECUACIÓN COMPLETA DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES	230
ROTACIÓN DE CÓNICAS	230
TRABAJO PRACTICO ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES	239

VECTORES ECUACIONES DEL PLANO Y DE LA RECTA

VECTORES GEOMÉTRICOS

Definimos vectores como un conjunto ordenado de números que pueden escribirse en forma horizontal o vertical. Aquí trabajaremos con una aplicación de los vectores en el campo geométrico, que son usados además en la física en conceptos como los de fuerza, velocidad, trabajo, etc.

CONCEPTO DE VECTOR GEOMÉTRICO

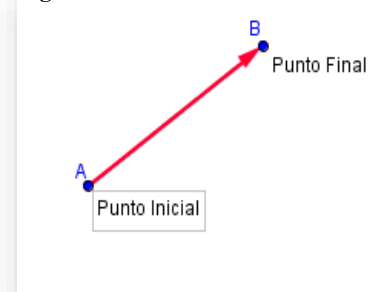
Definición: Llamamos vector o segmento orientado, a todo segmento en el que se ha establecido un orden \overrightarrow{AB} para sus extremos, se suele decir también que un vector es un par ordenado de números reales. Al primer punto extremo lo denominamos punto inicial, y al segundo punto extremo, punto final del mismo. La recta que contiene al vector determina la *dirección* del mismo. Un vector queda determinado si se conoce su módulo, es decir la distancia entre los puntos extremos y su dirección, por lo tanto *un vector es un ente matemático que se caracteriza por tener **módulo** y **dirección***

Notación: Los vectores se indicarán con una letra minúscula con una flecha arriba o también, con el nombre del punto inicial y final (Fig. 1)

Ejemplo: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

MÓDULO DE UN VECTOR: Se llama módulo de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. Es siempre un número positivo. Dado el vector \vec{v} , el módulo se representa por cualquiera de las siguientes maneras: $|\overrightarrow{AB}|$; $|\vec{v}|$

Fig. 1



CLASIFICACIÓN DE VECTORES

Los vectores podemos clasificarlos en:

- ✓ **Vectores libres** no están aplicados en ningún punto en particular
- ✓ **Vectores fijos** están aplicados en un punto particular

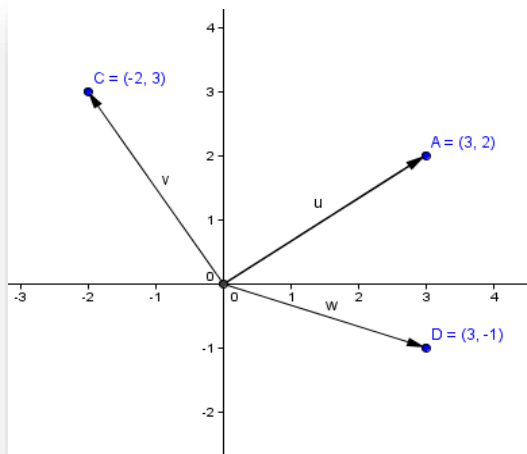
Según su dirección y módulo:

- ✓ módulo igual a cero **vectores nulos**
- ✓ módulo igual a uno **vectores unitarios**
- ✓ el mismo módulo y sentido contrario **vectores opuestos**
- ✓ el mismo módulo y la misma dirección **vectores equivalentes**
- ✓ direcciones perpendiculares **vectores perpendiculares**
- ✓ direcciones paralelas **vectores paralelos**
- ✓ están contenidos en un mismo plano **vectores coplanares**
- ✓ están contenidos en una misma recta **vectores colineales**

VECTORES EN \mathbb{R}^2 El conjunto de todos los puntos en el plano corresponde al conjunto de todos los vectores cuyos puntos iniciales se encuentran en el origen de coordenadas O. Para el punto A, corresponde el vector $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, para el punto C, el vector $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$, estos vectores se conocen con el nombre de **vectores estándar**.

Observación: en esta situación las coordenadas del punto coinciden con las componentes del vector

Fig. 2



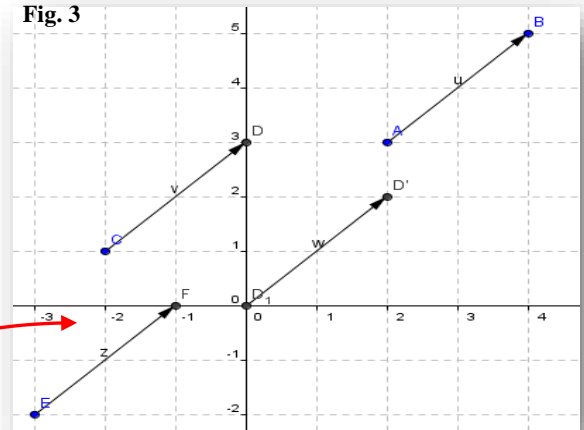
$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (3, 2)$ 3 y 2 son las componentes del vector y las coordenadas del punto A Fig. 2

Se dice que el vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ son vectores posición o vectores en posición estándar

Si dos segmentos de recta dirigidos \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} tienen la misma magnitud y dirección se dice que son **equivalentes**. (fig.3), sin importar donde se localice el origen. Lo dicho anteriormente corresponde a **vectores libres**.

Representante

Fig. 3



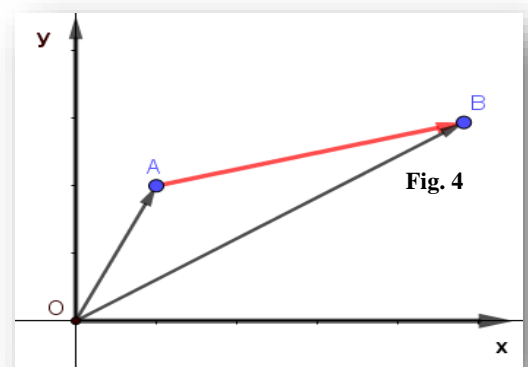
Cuando consideramos un vector, designándolo por los puntos origen y extremo, en realidad estamos considerando un representante del mismo. Hay infinitos otros puntos que definen representantes del mismo vector, ya que debemos tener en cuenta que consideramos vectores libres. Fig 3

Si $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Como los vectores se encuentran en posición estándar coinciden con las coordenadas de los puntos

$$\overrightarrow{OB} = B \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OA} = A$$

Podemos decir entonces que el vector que:



$$\overrightarrow{AB} = \text{coordenadas del punto final (B)} - \text{coordenadas del punto inicial (A)}$$

En la fig. 3 tenemos los puntos A (2,3) y B (4,5) por lo tanto el vector \overrightarrow{AB} que registra el desplazamiento desde A (punto Inicial) hasta B (punto final), es precisamente la diferencia de las respectivas coordenadas de los puntos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,5) - (2,3) = (4 - 2; 5 - 3) = (2; 2)$$

De manera similar, $C(-2,1)$ y $D(0,3) \rightarrow \overrightarrow{CD} = [0 - (-2); 3 - 1] = (2; 2)$ y entonces \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son equivalentes.

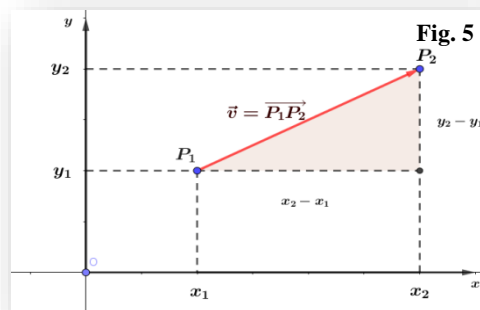
COMPONENTES DE UN VECTOR

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, las componentes del vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ definido por dichos puntos, serán las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados Fig. 5

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (v_x, v_y) \text{ donde}$$

$$v_x = x_2 - x_1 \text{ Proyección sobre el eje x}$$

$$v_y = y_2 - y_1 \text{ Proyección sobre el eje y}$$



Observación: no debe confundirse coordenadas de un punto con componentes de un vector, especialmente cuando se toma el representante en el origen.

MODULO DE UN VECTOR

Consideremos el vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ el módulo o longitud de \vec{v} , será la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

*Dados $P_1(2,1)$ y $P_2(-3,5)$, encontrar un vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ y hallar su módulo $|\vec{v}|$

Solución:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \overrightarrow{P_1P_2} = (P_2 - P_1) = (-3,5) - (2,1) \\ &= (-3 - 2, 5 - 1) = (-5,4) \end{aligned}$$

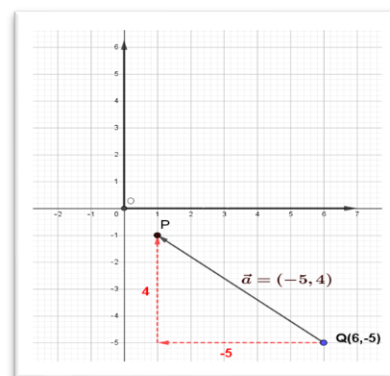
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

*Sea el vector $\vec{a} = \overrightarrow{QP}$, donde Q (6, -5) es el origen del vector $\vec{a} = (-5,4)$ ¿Cuál es el extremo de ese representante? Ayuda $P(x_2, y_2)$

Solución:

$$a_x = x_2 - x_1 \quad -5 = x_2 - 6 \rightarrow x_2 = 1$$

$$a_y = y_2 - y_1 \quad 4 = y_2 + 5 \rightarrow y_2 = -1$$



1. ¿El representante de \vec{b} en el origen tiene por extremo al punto M (-5, 4) ¿Cuáles son las componentes del vector \vec{b} ?
2. ¿Dado $\vec{a} = (3, -3)$
 - 2.1 Si P (-3, 2) es el origen del representante, hallar el otro extremo
 - 2.2 Hallar el origen del representante, cuyo extremo es Q (2, -5)
 - 2.3 Hallar componentes de $-\vec{a}$

VECTOR UNITARIO O VERSOR

Es un vector en la misma dirección de \vec{v} , pero de módulo uno y se obtiene dividiendo \vec{v} por su módulo $|\vec{v}|$.

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

*¿Es unitario el vector $\vec{v} = (1, -1)$?

**Halla un vector unitario en la dirección de \vec{v}

Solución:

*NO, porque su módulo no es 1 $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

** $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ porque si sacamos el $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

VERSORES EN EL PLANO

Son los vectores $\vec{i} = (1, 0)$; $\vec{j} = (0, 1)$; tomando sus representantes en el origen, estos vectores tienen direcciones coincidentes con las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

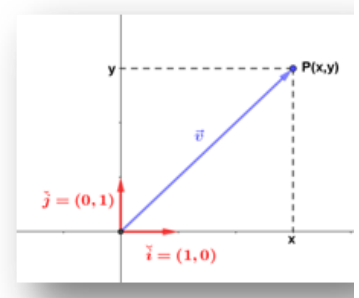
Todo vector de \mathbb{R}^2 es una **combinación lineal** de los versores \vec{i}, \vec{j}

Sea $\vec{v} = (x, y)$ se tiene entonces

$$\vec{v} = (x, 0) + (0, y)$$

$$\vec{v} = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA

Dado $\vec{v} \neq \vec{0}$ para hallar un vector unitario (\vec{u}) que tenga igual dirección que \vec{v} basta hallar un escalar $\lambda > 0$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ y $|\lambda \vec{v}| = 1$

Como $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}|$, entonces $|\lambda \vec{v}| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\vec{v}|}$ por lo tanto un vector unitario es el cociente entre el vector y su módulo:

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$$

Observaciones: si $\lambda = -\frac{1}{|\vec{v}|}$ se obtiene $-\vec{v}$ (versor con dirección opuesta a la de \vec{v})

*Dados $A(1,2)$ y $B(5,5)$ halla un vector de módulo 1, que tenga la misma dirección que \overrightarrow{AB} .

Solución:

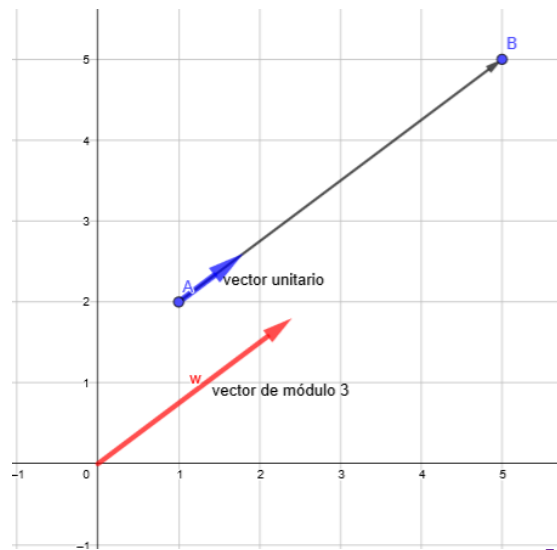
$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 5 - 2) = (4, 3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \check{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{5}(4, 3)$$

* Halla un vector de módulo 3 y en la misma dirección de \overrightarrow{AB}

$$\vec{w} = 3 \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 3 \cdot \check{u} = \frac{3}{5}(4, 3)$$

$$\text{Verificación } |\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = 3$$



ANGULOS DIRECTORES

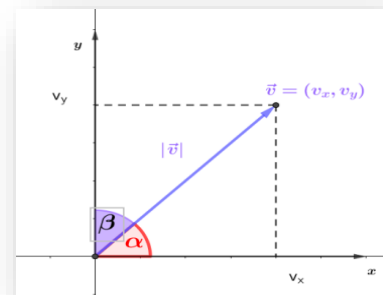
Dado un vector no nulo \vec{v} , se llaman ángulos directores de \vec{v} , a los ángulos α , β que forma \vec{v} con los versores \check{i} , \check{j} respectivamente. Los ángulos directores son mayores que 0° y menores que 180°

Se llaman cosenos directores de \vec{v} , a los cosenos de sus ángulos directores:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

¿Cómo es \vec{v} si $\alpha = 0^\circ$? , ¿Si $\alpha = \pi$?

¿Cómo es \vec{v} si $\beta = 0^\circ$? , ¿Si $\beta = \pi$?

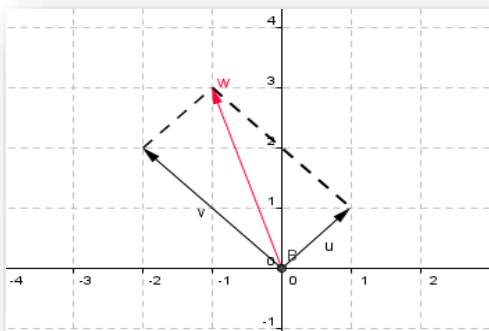


Observaciones: Los ángulos (o los cosenos) directores de un vector; determinan analíticamente la dirección del mismo. También se puede utilizar la función trigonométrica de la tangente

OPERACIONES

Suma o diferencia: se realiza componente a componente. Sea $\vec{u} = (u_1; u_2)$ y $\vec{v} = (v_1; v_2)$ entonces la suma o diferencia de $\vec{u} \pm \vec{v}$ es el vector

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1; u_2 \pm v_2)$$



Si $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = (-2,2)$ Entonces $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-1, 3)$

Si la diagonal principal representa la suma, ¿qué representa la contradiagonal?

¿Dados los vectores $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{b} = (4,-3)$ y $\vec{d} = (-2,1)$. Hallar escalares α y β tales que:
 $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

Observación: Debes plantear la igualdad en términos de las componentes y resolver el sistema de ecuaciones obtenido al igualar las respectivas componentes. Se dice que \vec{d} es combinación lineal de los vectores \vec{a} y \vec{b} .

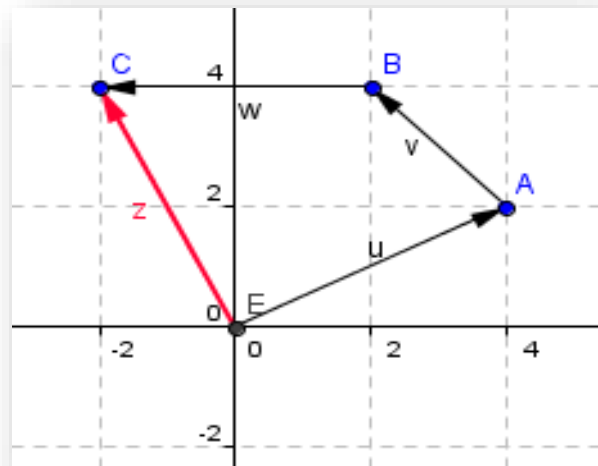
Sean $A(4,2)$; $B(2,4)$ y $C(-2,4)$.

Entonces $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} \rightarrow$

$$\vec{OC} = (4,2) + (-2,2) + (-4,0) =$$

$$\vec{OC} = (-2,4)$$

EL VECTOR RESULTANTE VA DESDE EL ORIGEN DEL PRIMER VECTOR HASTA EL EXTREMO DEL ULTIMO VECTOR



MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

El escalamiento de un vector, se logra multiplicando cada componente del vector por un número

$\lambda \in \mathbb{R}$ (se lee lambda perteneciente a los reales)

Dado $\vec{v} \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el producto de $\lambda\vec{v}$ tiene:

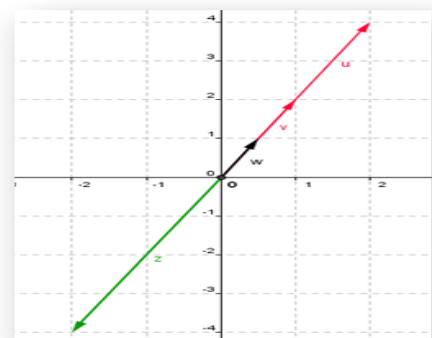
- la misma dirección de \vec{v} , si $\lambda > 0$
- la dirección opuesta si $\lambda < 0$
- el vector nulo si $\lambda = 0$

Si $\vec{v} = (1,2)$ entonces si se multiplica a \vec{v} por un escalar λ :

- si $0 < \lambda < 1$ \vec{v} se comprime \vec{w}
- si $\lambda > 1$ se dilata \vec{u}
- si $\lambda < 0$ cambia de sentido \vec{z}

El módulo de $\lambda\vec{v}$ es el módulo de \vec{v} multiplicado por el valor absoluto de λ

$$\text{Sea } \vec{v} = (v_1, v_2) \quad \lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2) \rightarrow |\lambda\vec{v}| = |\lambda||\vec{v}|$$



¿Si se aplican dos operaciones consecutivas al vector $(-1,3)$ en \mathbb{R}^2 , primero se lo multiplica por un escalar fijo y luego se le suma un vector fijo, ¿es posible llegar al vector $\vec{w} = (2,3)$

CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE DOS VECTORES

Propiedad: dos vectores no nulos \vec{u} y \vec{v} son paralelos si y sólo si existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Dos vectores son paralelos cuando tienen igual dirección o direcciones opuestas (se dice también que son colineales porque están sobre la misma línea)

PRODUCTO ESCALAR O PUNTO

Las versiones vectoriales de *longitud*, *distancia* y *ángulo* pueden describirse a través del empleo de la noción del producto escalar de dos vectores

Dados \vec{a} y \vec{b} no nulos, se define producto escalar de \vec{a} con \vec{b} al número real:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta^{**}$$

Por extensión, si uno de los vectores es nulo, decimos que el producto escalar es cero.

Observación: ** se obtiene aplicado la Ley de los cosenos Grossman Cap. IV pág. 248 7ma. Ed.

PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES

Teniendo en cuenta que \vec{i} y \vec{j} son unitarios y que el ángulo que forman dos cualquiera de ellos es $\frac{\pi}{2}$, reemplazando en ** podemos observar lo siguiente

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos 90^\circ \rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

El producto escalar de un vector por sí mismo será:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0^\circ = 1 \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| |\vec{j}| \cos 0^\circ = 1$$

Expresando $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en función de las componentes canónicas

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + \cancel{a_1 \cdot b_2 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j})} + \cancel{a_2 \cdot b_1 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{i})} + a_2 \cdot b_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_2 \cdot b_2 \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Importante para realizar el producto en primer lugar \vec{a} y \vec{b} deben tener igual cantidad de componentes y en segundo lugar el producto escalar de dos vectores es un número no otro vector, por eso se denomina producto escalar

Dados $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4, -3)$, $\vec{c} = (0, -5)$ realizar el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2) \cdot (4, -3) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (1, 2) \cdot (0, -5) = 1 \cdot 0 + 2(-5) = -10$$

¿El producto escalar de tres vectores será un también un escalar?

ANGULO ENTRE DOS VECTORES

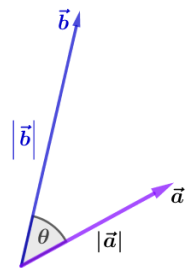
A partir del producto escalar se puede calcular el ángulo entre dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} cuyos orígenes coinciden

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

*Si \vec{a} y \vec{b} tienen la misma dirección, o sea son coincidentes, se considera $\theta = 0^\circ$

*Si tienen dirección opuesta, se considera $\theta = \pi = 180^\circ$

* En ambos casos ¿cómo serían los vectores \vec{a} y \vec{b} ?



VECTORES ORTOGONALES Dos vectores no nulos, \vec{a} y \vec{b} son ortogonales si el ángulo θ que forman es $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ y por lo tanto se cumple

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Demostración:

Si \vec{a} y \vec{b} son ortogonales $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ por lo tanto $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ya que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

*Decidir si los vectores $\vec{a} = (-1, 2)$ y $\vec{b} = (6, 3)$ son ortogonales.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1, 2) \cdot (6, 3) = (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 0$ por lo tanto son ortogonales.

*Determinar el valor de x, para que los vectores $\vec{a} = (x, 5)$ y $\vec{b} = (3, -3)$ sean ortogonales

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, 5) \cdot (3, -3) = x \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow \vec{a} = (5, 5)$

PROYECCIÓN ESCALAR Dados dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} , la proyección escalar o componente escalar de \vec{b} sobre \vec{a} se define como el producto del módulo de \vec{b} por el coseno del ángulo θ que forman \vec{a} y \vec{b} .

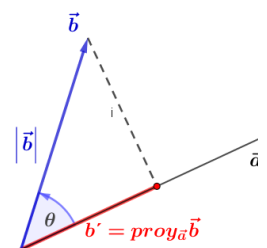
$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \mathbf{b}' = |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

Como

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

entonces la proyección de \vec{b} sobre \vec{a} será

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$$



Siendo $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \check{a}$ (versor con la dirección de \vec{a}), implica que la proyección escalar de \vec{b} sobre \vec{a}

Se suele también decir $proj_{\vec{a}} \vec{b}$, o “la componente de \vec{b} en la dirección de \vec{a} ”

$$proj_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \check{a}$$

Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$	Si $\theta = \frac{\pi}{2}$	Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$
$proj_{\vec{a}} \vec{b} > 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$proj_{\vec{a}} \vec{b} = 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$proj_{\vec{a}} \vec{b} < 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

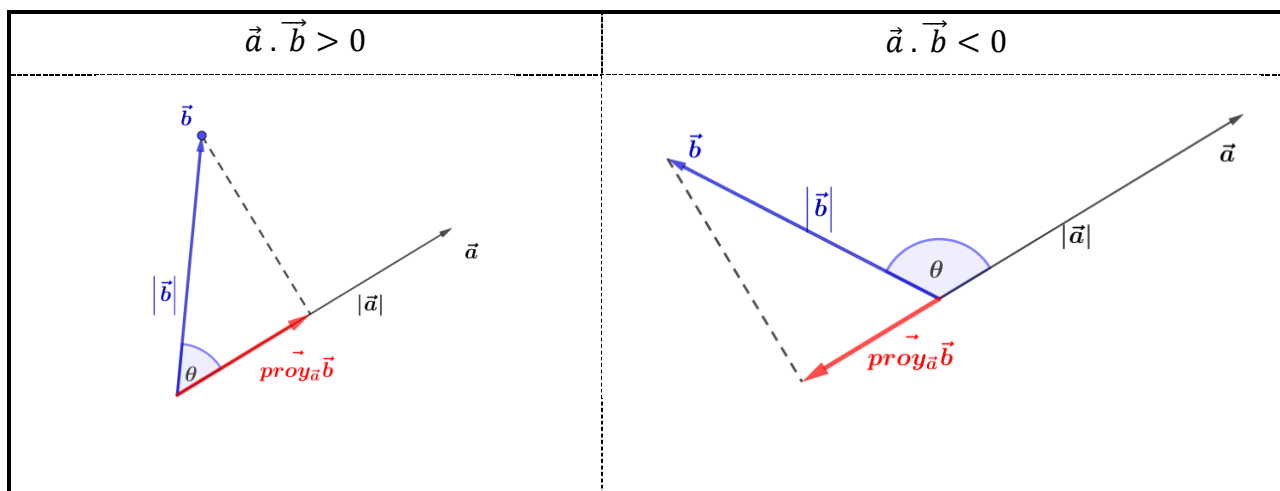
¶ Prueba que las proyecciones de $\vec{a} = (a_x, a_y)$ en las direcciones de \check{i}, \check{j} son las componentes del vector \vec{a}

PROYECCIÓN VECTORIAL

La proyección vectorial del vector \vec{b} sobre el vector \vec{a} es un vector que es múltiplo escalar del vector \vec{a} y lo indicamos $\overrightarrow{proj_{\vec{a}} \vec{b}}$

$$\overrightarrow{proj_{\vec{a}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \rightarrow \overrightarrow{proj_{\vec{a}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \check{a}$$

- ✓ La $\overrightarrow{proj_{\vec{a}} \vec{b}}$ está en la misma dirección que el vector \vec{a} si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
- ✓ La $\overrightarrow{proj_{\vec{a}} \vec{b}}$ está en dirección opuesta al vector \vec{a} si $\theta > \frac{\pi}{2}$



Dados $\vec{u} = (3, -1)$ y $\vec{v} = (2, 2)$, calcula y grafica:

- La proyección escalar de \vec{v} sobre \vec{u}
- La proyección vectorial de \vec{v} sobre \vec{u}
- Grafica ambas proyecciones
- La proyección escalar de \vec{u} sobre el vector \vec{v}
- La proyección vectorial de \vec{u} sobre el vector \vec{v}
- Grafica ambas proyecciones
- Es indistinto $proy_{\vec{u}} \vec{v}$ que $proy_{\vec{v}} \vec{u}$

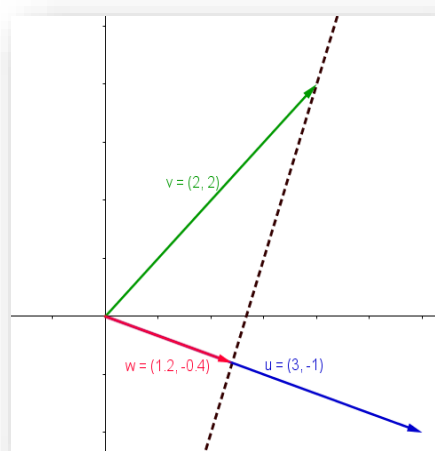
Solución:

$$a) \text{ } proy_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(2,2) \cdot (3,-1)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6-2}{\sqrt{10}}$$

$$proy_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$b) \vec{w} = \overrightarrow{proy_{\vec{u}} \vec{v}} = \frac{(2,2) \cdot (3,-1)}{(\sqrt{3^2 + (-1)^2})^2} \cdot (3, -1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{proy_{\vec{u}} \vec{v}} = \frac{4}{10} (3, -1) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$



¿Cuál es el vector $proy_{\vec{a}} \vec{b}$ cuando \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares?

Dibuja un par de vectores \vec{a} y \vec{b} de modo que la $proy_{\vec{a}} \vec{b}$ resulte:

- de igual dirección que \vec{b}
- de distinta dirección que \vec{b}

(Los temas tratados están ampliamente desarrollados en el libro Grossman 7ma Edición -Capítulo 4 Vectores en R^2 y R^3 , se recomienda su lectura y estudio)

TRABAJO PRÁCTICO: VECTORES EN \mathbb{R}^2

- Dados los puntos $P(3,0)$; $Q(2,3)$; $R(-2,3)$; $S(3,-2)$; $T(0,-2)$ encuentra:
 - el vector en posición estándar $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$; $\vec{w} = \overrightarrow{OR}$; $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$; $\vec{t} = \overrightarrow{OT}$. ¿Qué tienen en común el vector en posición estándar y las coordenadas de los puntos?
 - escribe estos vectores como una combinación lineal de los versores \vec{i}, \vec{j}
 - la magnitud o módulo de $|\vec{u}|, |\vec{v}|, |\vec{w}|, |\vec{s}|$
 - la dirección de cada uno de los vectores (o sea en que cuadrante se encuentran)
 - un vector en la misma dirección de cada uno de ellos, pero de módulo 1 (vector unitario)
 - grafica cada uno de estos y sus respectivos vectores unitarios
 - calcula y representa gráficamente $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$
 - ¿qué efecto geométrico tiene cambiarle el signo a la primera coordenada de cada vector?
 - ¿qué efecto geométrico tiene cambiarle el signo a la segunda coordenada de cada vector?
 - ¿qué efecto geométrico produce multiplicar a cada vector por -1 ?

- Dibuja los vectores hallados en el ítem 1.a con sus puntos iniciales situados en el punto $(-2,5)$, determina los puntos finales

- Si los vectores en el ejercicio 1 se trasladan de modo que sus extremos finales se ubiquen en el punto $(5,7)$; determina los puntos que correspondan a sus puntos iniciales

- Dados los vectores \vec{u} y \vec{v} (ejercicio 1) dibuja los siguientes vectores:

$$\vec{j} = \vec{u} + 3\vec{v} \quad \vec{l} = \vec{u} - \vec{v} \quad \vec{p} = \vec{v} - 2\vec{u} \quad \vec{q} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$$

- Calcula el producto escalar e indica si son ortogonales o paralelos

$$\vec{u} \cdot \vec{t} \quad \vec{w} \cdot \vec{s} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad (5 \vec{v}) \cdot \vec{s}$$

- Dados los siguientes puntos $A(1, -1)$, $B(4, 2)$; $C(0, -2)$, $D(2, -1)$. Calcula y comprueba que la resultante está en función del origen del primer vector y el extremo del último

$$a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad b) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} \quad c) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \quad d) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \quad e) \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC})$$

- Dados los puntos $A(4,2)$, $B(10,5)$, $C(2,6)$ y $D(x,9)$, se pide:

- Calcula x para que \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} sean paralelos.
- Calcula x para que \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{DA} tengan el mismo módulo.

- Dados los vectores $\vec{u} = (x, 5)$ y $\vec{v} = (8, 4)$, ¿Qué valor debe tomar x para que: a) sean paralelos. b) sean perpendiculares .c) verifiquen que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 42$

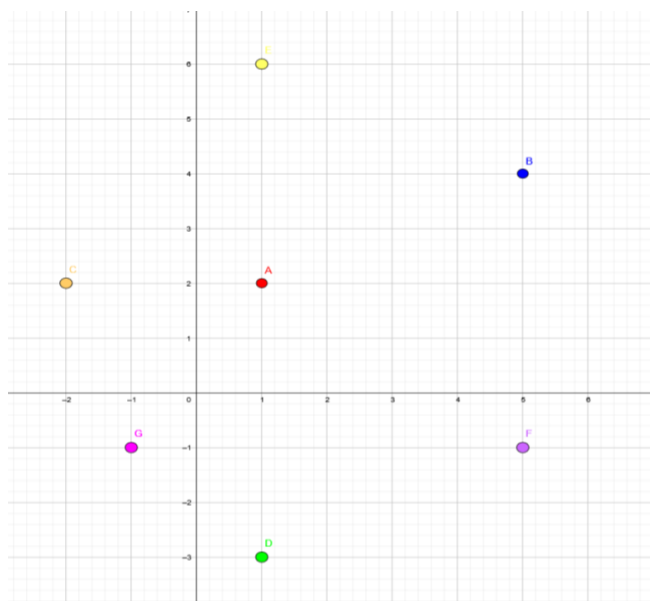
- Demuestra que no hay vectores \vec{a} y \vec{b} , tales que el módulo de \vec{a} sea igual a 1, el módulo de $|\vec{b}| = 2$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

- Dados los puntos $A(2, 6)$; $B(4, 8)$; $C(3, 2)$ y $D(7, 1)$, se pide:

- a) Calcula el ángulo que forman los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD}
- b) Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
11. a) Si $\vec{u} = -\hat{i} + 5\hat{j}$ y $\vec{v} = k\hat{i} + \hat{j}$, el ángulo entre dichos vectores es $\pi/3$, determina k.
- b) Si $\vec{u} = 3\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{v} = \hat{i} + k\hat{j}$, \vec{u} y \vec{v} , son perpendiculares, determina k
- c) Si $\vec{u} = k\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{v} = 2\hat{i} + k\hat{j}$, determina k, si \vec{u} y \vec{v} son paralelos
12. *Más de lo mismo, comprueba si aprendiste*

En la siguiente figura encuentra el vector y sus opuestos

- a. \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CG} , \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{FG} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{AF} , \overrightarrow{GD}
- b. Escríbelos en forma canónica
- c. Calcula el módulo de ellos
- d. Escribe un vector unitario en la dirección de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{GD} y \overrightarrow{FG}
- e. Ahora escribe un vector de módulo 2 con la dirección de los vectores del ítem d. Grafica
- f. Realiza los siguientes productos escalares: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{GF}$ ¿Qué te da como resultado multiplicar dos vectores? ¿Y si multiplicaras escalarmente 3 vectores?
- g. Utilizando la definición de producto escalar halla los ángulos entre \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AF}
- h. Propón un vector paralelo a \overrightarrow{AG} , con origen en el punto B, ¿es único?
- i. Encuentra la proyección escalar y vectorial de por lo menos tres vectores sobre los ejes coordenados ¿a qué conclusión puedes llegar?
- j. Calcula las siguientes proyecciones escalares y vectoriales
 $Proy_{\overrightarrow{AF}} \overrightarrow{AB}$, $Proy_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$, $Proy_{\overrightarrow{GD}} \overrightarrow{AG}$, $Proy_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$

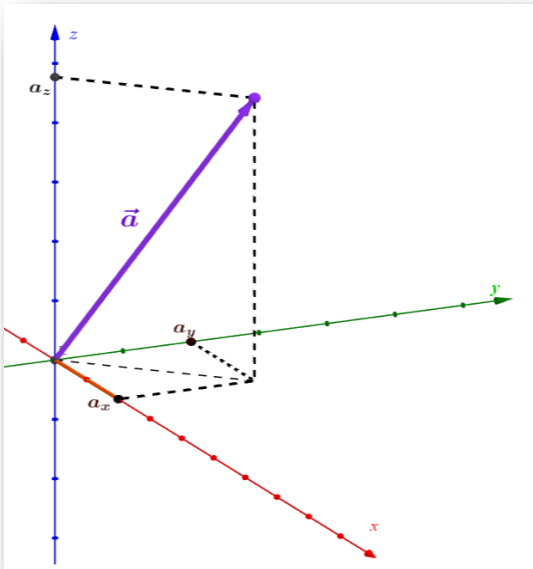
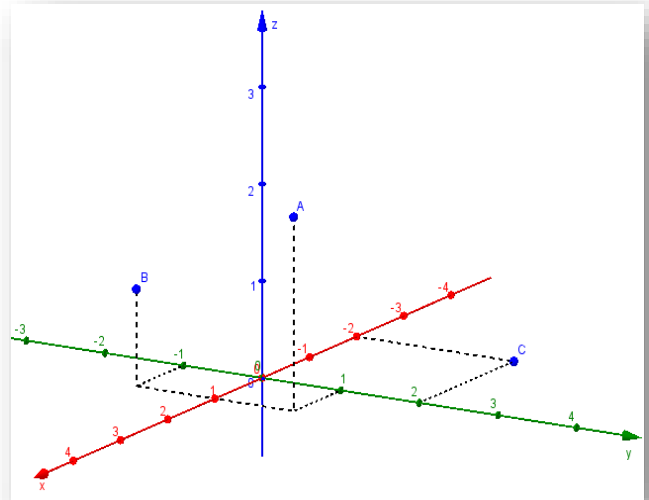


VECTORES GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO \mathbb{R}^3

Designamos con \mathbb{R}^3 a los vectores geométricos en el espacio y haremos a continuación un estudio analítico de los mismos.

Así como en el plano hemos visto que un punto puede ser representado conociendo un par ordenado (x, y) , en el espacio, un punto se representa mediante una terna ordenada (x, y, z) en relación a tres ejes perpendiculares entre sí.

Representa gráficamente los puntos A (1, 1, 2); B (1, -1, 1); C (-2, 2, 0)



MODULO DE UN VECTOR

Consideremos el vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ el módulo o longitud de \vec{a} , será:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

es decir; el módulo de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector.

COMPONENTES DE UN VECTOR

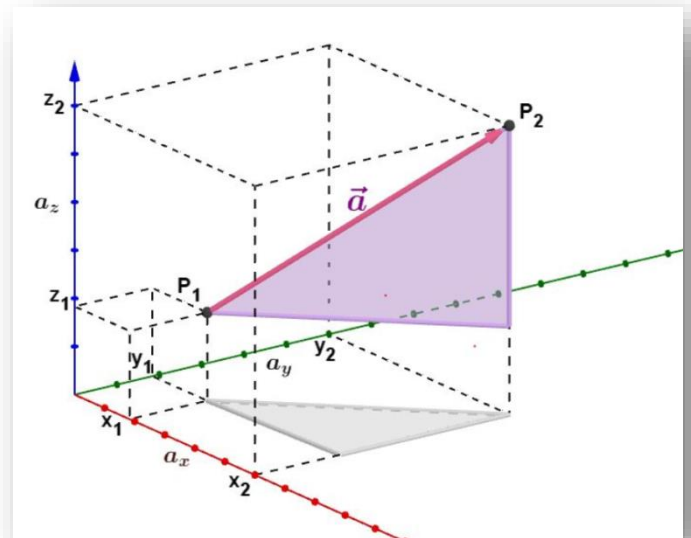
Dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ las componentes del vector $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ serán las proyecciones escalares del vector sobre los ejes coordenados

$$a_x = \text{Proy}_{OX} \overrightarrow{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

$$a_y = \text{Proy}_{OY} \overrightarrow{P_1P_2} = y_2 - y_1$$

$$a_z = \text{Proy}_{OZ} \overrightarrow{P_1P_2} = z_2 - z_1$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$



Sea \vec{a} un vector que tiene a $\overrightarrow{P_1P_2}$ como representante, siendo $P_1 (2, 1, 3)$ y $P_2 (4, 5, 5)$ tendremos que:

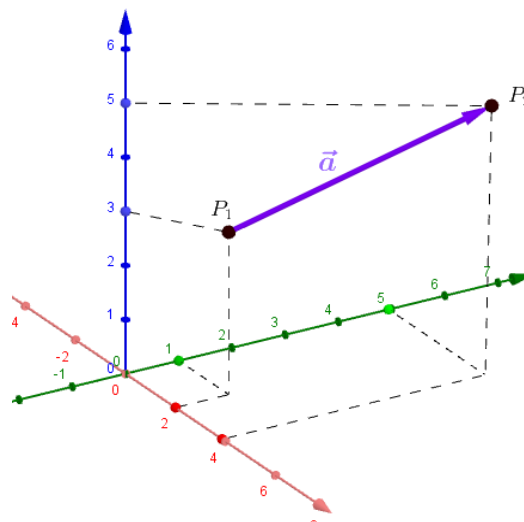
$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (P_2 - P_1)$$

$$(4 - 2; 5 - 1; 5 - 3)$$

$$\vec{a} = (2, 4, 2)$$

El módulo de \vec{a} es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$



Si $Q (6, -5, 7)$ es el origen del vector $\vec{a} = \overrightarrow{QP} = (-5, 4, 3)$ ¿Cuál es el punto final de ese representante?

Solución:

$$\vec{a} = \overrightarrow{QP} \rightarrow \vec{a} = P - Q \text{ (Coordenadas del Punto Final - coordenadas del Punto Inicial)}$$

$$(-5, 4, 3) = (x_p, y_p, z_p) - (6, -5, 7) \rightarrow \text{Igualando las componentes homólogas}$$

$$-5 = x_p - 6 \quad \rightarrow \quad x_p = -5 + 6 = 1$$

$$4 = y_p + 5 \quad \rightarrow \quad y_p = 4 - 5 = -1$$

$$3 = z_p - 7 \quad \rightarrow \quad z_p = 3 + 7 = 10$$

Las coordenadas del punto final son $P(1, -1, 10)$

¶ Ejercitación 1

1. El representante de \vec{b} en el origen tiene por extremo al punto $M (-5, 4, 3)$ ¿Cuáles son las componentes del vector \vec{b} ?
2. Dado $\vec{a} = (3, -3, -7)$
 - a) Hallar el extremo o punto final del representante en $Q (-3, 2, 5)$
 - b) Hallar el origen del representante, cuyo extremo es $P (2, -5, 6)$
 - c) Hallar componentes de $-\vec{a}$

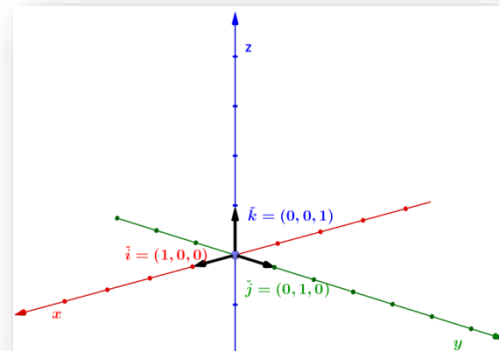
Observación: no debe confundirse coordenadas de un punto con componentes de un vector, especialmente cuando se toma el representante en el origen.

VERSORES EN EL ESPACIO

Recordemos que un versor es un vector cuyo módulo es igual a 1. $|\vec{v}| = 1$. En el caso de tratarse de un vector unitario, lo indicamos con un arco en vez de una flecha (\vec{v}).

Los versores en \mathbb{R}^3 son los vectores:

$\vec{i} = (1, 0, 0)$; $\vec{j} = (0, 1, 0)$; $\vec{k} = (0, 0, 1)$; tomando sus representantes en el origen, estos vectores tienen direcciones coincidentes con las direcciones de los ejes X, Y, Z, respectivamente



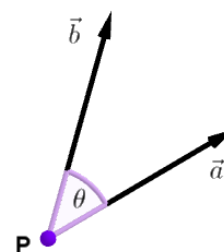
ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES

Dados dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} , con representantes en un origen común P y no pertenecientes a una misma recta, el ángulo θ de medida positiva y menor que 180° , que forman, es por definición el ángulo formado por los vectores \vec{a} y \vec{b} .

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

*Si \vec{a} y \vec{b} tienen la misma dirección, o sea son coincidentes, se considera $\theta = 0^\circ$

*Si tienen dirección opuesta, se considera $\theta = \pi = 180^\circ$



ÁNGULOS DIRECTORES Y COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Dado un vector no nulo \vec{a} , se llaman ángulos directores de \vec{a} , a los ángulos α , β , γ que forma \vec{a} con los versores \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} respectivamente.

Tomando el representante en el origen de coordenadas, se tiene:

$$0 \leq \alpha \leq \pi ; 0 \leq \beta \leq \pi ; 0 \leq \gamma \leq \pi$$

¿Cómo es \vec{a} si $\alpha = 0$? , ¿Si $\alpha = \pi$?

¿Cómo es \vec{a} si $\beta = 0$? , ¿Si $\beta = \pi$?

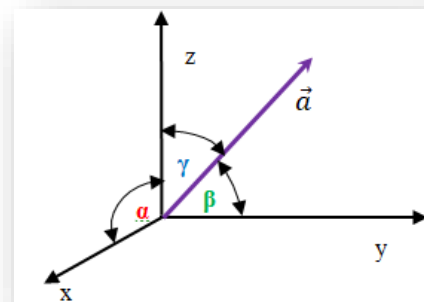
¿Cómo es \vec{a} si $\gamma = 0$? , ¿Si $\gamma = \pi$?

Se llaman cosenos directores de \vec{a} , a los cosenos de sus ángulos directores.

Siendo $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y α , β , γ sus ángulos directores se tiene:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha ; a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta ; a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma ; \text{ de donde:}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} ; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} ; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$



$$\text{Luego: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1)$$

Esto significa que no cualquier terna de ángulos puede ser una terna de ángulos directores de un vector \vec{a} , ya que los tres ángulos directores quedan vinculados por medio de la ecuación (1) que es llamada relación fundamental.

*¿Pueden $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{6}$ ser cosenos directores?

Solución: $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \neq 1$

Luego, NO pueden ser ángulos directores de ningún vector.

*Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; determinar γ

Solución: aplicando la relación fundamental y despejando γ

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{3}} \Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = 60^\circ$$

Verificación: $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

Observaciones:

*Los ángulos (o los cosenos) directores de un vector; determinan analíticamente la dirección del mismo.

*Si α, β, γ son ángulos directores de \vec{a} , $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ son ángulos directores de $-\vec{a}$

*Si $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, como $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ y

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; $\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$; $\cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$; se comprueba que las componentes de $-\vec{a}$ son: $(-a_x, -a_y, -a_z)$.

Podemos precisar entonces el concepto de igual dirección para dos vectores, diciendo que tienen los mismos ángulos (cosenos) directores.

¶ Ejercitación 2

1. Dado \vec{a} , tal que $|\vec{a}| = 2$ y sus ángulos directores $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{2\pi}{3}$; determinar sus componentes.

1.1. Halla el extremo de su representante en $A(-1, 3, 2)$

1.2. Halla el origen del representante, cuyo extremo es $B(7, -6, 1)$

1.3. Halla los ángulos directores y componentes de un vector de dirección opuesto a \vec{a}

2. Calcula los cosenos directores del vector $\vec{b} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$

3. ¿Puede un vector tener los siguientes ángulos directores?:

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{3\pi}{4}$; $\gamma = \frac{\pi}{3}$

4. ¿Puede un vector formar con dos ejes coordenados los siguientes ángulos?:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$

b) $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{3}$

c) En caso afirmativo, ¿cuál es el tercer ángulo?

5. Un vector \vec{a} forma con los ejes x e y , respectivamente, ángulos $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Calcula sus componentes sabiendo que $|\vec{a}| = 2$.

6. Halla las coordenadas de un punto M , que es extremo de \overrightarrow{OM} , forma ángulos iguales con los tres ejes, y su módulo es 3.

7. Si $|\vec{a}| = 50$ y dos de sus componentes son $a_x = 3$, $a_y = 4$. ¿Cuál es la tercera componente?

8. Halla los cosenos directores de vectores paralelos a los planos coordenados y de vectores paralelos a los ejes coordenados.

COMPONENTES DEL VECTOR SUMA O DIFERENCIA

Dados $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$; el vector suma $\vec{a} \pm \vec{b}$, tiene por componentes

$$(a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

*Si $\vec{a} = (1, -3, 2)$ y $\vec{b} = (3, -5, 4) \rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (1 + 3, -3 - 5, 2 + 4) = (4, -8, 6)$

*Si $\vec{a} = (1, -3, 2)$ y $\vec{c} = (7, -5, 3) \rightarrow \vec{a} - \vec{c} = (1 - 7, -3 + 5, 2 - 3) = (-6, 2, -1)$

COMPONENTES DEL VECTOR $\lambda \vec{a}$

Dado $\vec{a} \neq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{a}$ tiene:

- la misma dirección de \vec{a} , si $\lambda > 0$
- la dirección opuesta si $\lambda < 0$
- el vector nulo si $\lambda = 0$

El módulo de $\lambda \vec{a}$ es el módulo de \vec{a} multiplicado por el valor absoluto de λ .

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^2 a_3^2} = \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} =$$

$$\lambda \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \lambda |\vec{a}|$$

Dado $\vec{a} = (-3, 2, 6)$, encontrar un vector \vec{v} en la misma dirección de \vec{a} pero de módulo 2

Solución: si \vec{v} y \vec{a} son colineales, entonces \vec{v} es múltiplo de \vec{a} o decimos que \vec{v} es el escalado de \vec{a} , se escribe $\vec{v} = \lambda \vec{a}$

$(v_1, v_2, v_3) = \lambda(-3, 2, 6)$ resolviendo componente a componente tendremos

$$\begin{cases} v_1 = -3\lambda \\ v_2 = 2\lambda \\ v_3 = 6\lambda \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

La segunda condición dice que

$$|\vec{v}| = 2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ sustituyendo } \textcircled{1} \text{ en } \textcircled{2}$$

$$2 = \sqrt{(-3\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (6\lambda)^2} =$$

$$2 = \sqrt{\lambda^2(9 + 4 + 36)}$$

$$2 = \lambda\sqrt{49} \rightarrow 2 = \lambda 7 \rightarrow \lambda = \frac{2}{7} \text{ sustituyendo el valor de } \lambda \text{ en } \textcircled{1} \quad \vec{v} = \left(-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

Verificación: $|\vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2} = 2$

VECTORES UNITARIOS CON UNA DIRECCION DADA

Dado $\vec{a} \neq \vec{0}$ para hallar un vector unitario (\check{a}) que tengan igual dirección que \vec{a} , $\lambda > 0$, basta hallar un vector unitario tal que $\check{a} = \lambda \vec{a}$ y $|\lambda \vec{a}| = 1$

Como $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$, entonces $|\lambda \vec{a}| = 1 \leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\vec{a}|}$ por lo tanto:

$$\check{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

Observaciones: si $\lambda = -\frac{1}{|\vec{a}|}$ se obtiene $-\check{a}$ (versor con dirección opuesta a la de \vec{a})

Importante: las componentes de un versor (vector unitario) son sus cosenos directores.

- Encuentra un vector de módulo 1 en la misma dirección que el vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$
- Comprueba que coincide con sus cosenos directores

Solución: $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2 \Rightarrow \check{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$

$$\check{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)$$

Verificación: $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

b. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \gamma = 0$

El ejercicio resuelto en la página anterior se puede resolver aplicando el concepto de vector unitario

Dado $\vec{a} = (-3, 2, 6)$, encontrar un vector \vec{v} en la misma dirección de \vec{a} pero de módulo 2

Solución: datos $\vec{a} = (-3, 2, 6)$ y $|\vec{v}| = 2$

Calculamos $\check{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ siendo $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7 \rightarrow \check{a} = \left(\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$

\vec{v} está en la misma dirección tanto de \vec{a} como también de su versor \check{a} , por lo podemos escribir

$$\vec{v} = \lambda \check{a}$$

$$|\vec{v}| = \lambda |\check{a}| \rightarrow \text{sustituyendo los datos } 2 = \lambda |1| \rightarrow \lambda = 2$$

Por lo tanto $\vec{v} = 2 \left(\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right) = 2\check{a}$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UN VECTOR

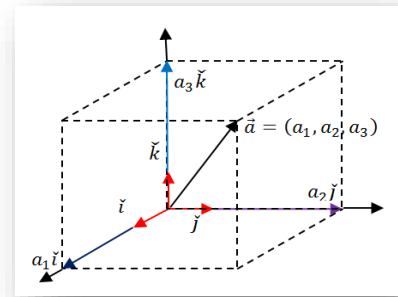
Todo vector del espacio, es una **Combinación Lineal** única de los vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Sea $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ se tiene entonces:

$$\vec{a} = (a_x, 0, 0) + (0, a_y, 0) + (0, 0, a_z)$$

$$\vec{a} = a_x(1, 0, 0) + a_y(0, 1, 0) + a_z(0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$



Dados $\vec{a} = -3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, realiza:

*) $\vec{a} + \vec{b}$ (se obtiene sumando las respectivas componentes)

$$\vec{a} + \vec{b} = (-3 + 6)\hat{i} + (1 - 3)\hat{j} + (2 + 1)\hat{k} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

**) $2\vec{a} + 4\vec{b}$ (se aplica primero propiedad distributiva y luego se realiza la suma)

$$2\vec{a} + 4\vec{b} = 2(-3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) + 4(6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$$

$$2\vec{a} + 4\vec{b} = (-6\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) + (24\hat{i} - 12\hat{j} + 4\hat{k}) = 18\hat{i} - 10\hat{j} + 8\hat{k}$$

PRODUCTO ESCALAR

Dados \vec{a} y \vec{b} no nulos, se define producto escalar de \vec{a} con \vec{b} a un número real (**escalar**)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Por extensión, si uno de los vectores es nulo, decimos que el producto escalar es cero.

PRODUCTO ESCALAR EN FUNCION DE LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES

El producto escalar entre los vectores que forman la terna fundamental $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, teniendo en cuenta que son unitarios y que el ángulo que forman dos cualquiera de ellos es $\frac{\pi}{2}$, resulta:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

Expresando $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ en función de las componentes.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + a_x b_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) + a_y b_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + a_y b_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) + a_z b_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + a_z b_y (\hat{k} \cdot \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \cdot \hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \cdot \hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Dados $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ $\vec{b} = (6, -2, 5)$, $\vec{c} = (0, 4, 1)$, calcula el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = -6 - 4 + 15 = \mathbf{5}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 8 + 3 = \mathbf{11}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ ¿será un escalar?

ESCALAR

VECTORES ORTOGONALES

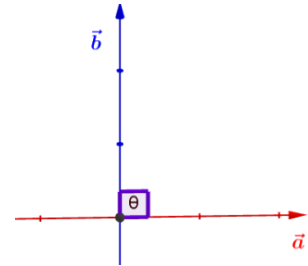
Dos vectores no nulos, \vec{a} y \vec{b} son ortogonales si el ángulo θ que forman es $\theta = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Demostración:

Si \vec{a} y \vec{b} son ortogonales $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ por lo tanto $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ya que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\text{Si } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$



¶ Ejercitación 4

1. Los vectores \vec{a} y \vec{b} forman un ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, calcula:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|^2$; $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$

2. Sabiendo que $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$ determinar α tal que $\vec{a} + \alpha \vec{b}$ y $\vec{a} - \alpha \vec{b}$ sean ortogonales.

3. Halla el vector \vec{x} , colineal con $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ que satisface la condición $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$

4. Halla el vector \vec{x} que es ortogonal con $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Satisfaciendo además la condición $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$, siendo $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

PROYECCION ESCALAR – PROYECCIÓN VECTORIAL

Este tema está desarrollado en vectores en \mathbb{R}^2 pág. 12-13

Dados dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} , la proyección escalar de \vec{b} sobre \vec{a} se define como el producto de modulo de \vec{b} por el coseno del ángulo θ que forman \vec{a} y \vec{b} .

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \theta \quad (1)$$

Como $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, reemplazando (1) la componente escalar de \vec{b} en la dirección de \vec{a} será:

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Siendo $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \check{a}$ el versor con la dirección de \vec{a}

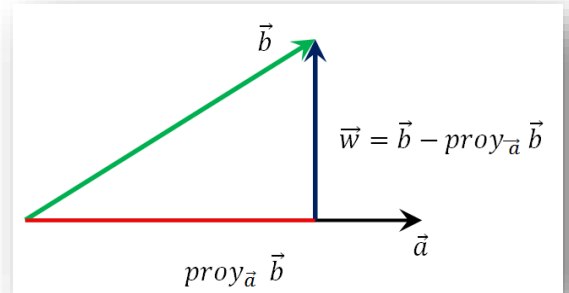
$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cdot \check{a}$$

Si $\vec{b} = \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} + \vec{w}$ entonces $\vec{w} = \vec{b} - \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$ es un vector ortogonal a \vec{a}

Se suele también decir que $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$, es “la componente de \vec{b} en la dirección de \vec{a} ”

Observación

- Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} > 0$
- Si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = 0$
- Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} < 0$



Las componentes de un vector \vec{a} , son las proyecciones de \vec{a} en las dirección de \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} respectivamente

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x = \text{proy}_{\vec{i}} \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = a_y = \text{proy}_{\vec{j}} \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = a_z = \text{proy}_{\vec{k}} \vec{a}$$

Dados $\vec{a} = (3, -1, 1)$ y $\vec{b} = (6, -1, 1)$. Calcula la componente de \vec{a} sobre \vec{i} (proyección escalar de \vec{a} sobre \vec{i}) y la proyección vectorial

Solución:

$$\text{proy}_{\vec{i}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{i}|} = \vec{a} \cdot \vec{i} = (3, -1, 1) \cdot (1, 0, 0) = 3$$

- Calcula la proyección vectorial de \vec{a} sobre \vec{i} (proyección vectorial de \vec{a} sobre \vec{i})

$$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{i}} \vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{i}|} \cdot \frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} = 3 \cdot \vec{i} = 3 \cdot (1, 0, 0) = (3, 0, 0)$$

- Calcula la proyección escalar o componente escalar de \vec{b} sobre \vec{a}

$$\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(6, -1, 1) \cdot (3, -1, 1)}{\sqrt{3^2 + 1 + 1}} = \frac{18 - 1 + 1}{\sqrt{11}} = \frac{16}{\sqrt{11}}$$

- Calcula la proyección vectorial de \vec{b} sobre \vec{a}

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}} &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(6, -1, 1) \cdot (3, -1, 1)}{\sqrt{3^2 + 1 + 1}} \cdot \frac{(3, -1, 1)}{\sqrt{11}} = \frac{16}{\sqrt{11}} \cdot \frac{(3, -1, 1)}{\sqrt{11}} \\ &= \frac{16}{11} (3, -1, 1) \end{aligned}$$

¶ Ejercitación 5

Dados $\vec{a} = (3, -1, 1)$; $\vec{b} = (6, -1, 1)$ y $\vec{c} = (2, -1, 6)$;

Calcula las proyecciones escalares, vectoriales y normales

1) $\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}$

2) $\text{proy}_{\vec{b}} \vec{c}$

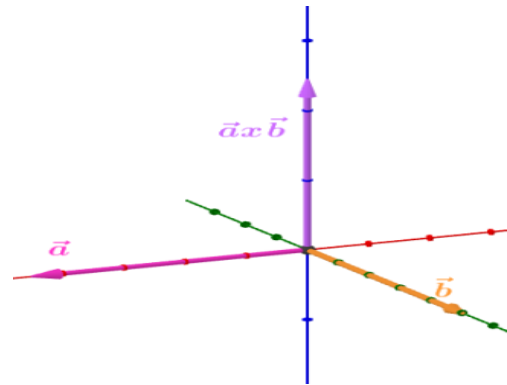
3) $\text{proy}_{\vec{b}} (\vec{a} + \vec{c})$

4) $\text{proy}_{\vec{b}} (\vec{a} + \vec{c} + \vec{b})$

PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES

Llamamos producto vectorial o producto cruz a la operación que se asocia por las condiciones.

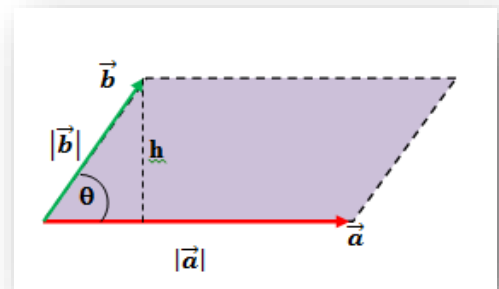
- 1) Si \vec{a} y \vec{b} son ambos no nulos y no colineales, $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal con \vec{a} y con \vec{b} , de forma tal que la terna $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ es una terna directa (Igualmente orientada que la terna $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$)



- 2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, siendo θ el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b}

* La primera condición indica que el producto vectorial es otro vector que define la dirección perpendicular al plano determinado por los vectores no colineales \vec{a} y \vec{b}

* La segunda condición indica que el módulo del producto vectorial: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ representa el área del paralelogramo que tiene a los vectores \vec{a} y \vec{b} como lados concurrentes.



- * $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ es conmutativo $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$ tienen direcciones opuestas pero el mismo módulo
- * $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ si \vec{a} y \vec{b} son colineales ($\vec{a} = \lambda \vec{b}$). En consecuencia:
- * $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \forall \vec{a}$
- * $\vec{0} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \forall \vec{b}$ si uno de los vectores es el vector nulo, el producto vectorial resulta el vector nulo.
- * $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
- * $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Prop. dist. del producto vectorial con respecto a la suma)
- * $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Por lo tanto aplicando las propiedades los productos vectoriales entre los pares de vectores que forman la terna fundamental $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, arrojan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} & \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k} & \hat{i} \times \hat{i} &= 0 \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} & \hat{k} \times \hat{j} &= -\hat{i} & \hat{j} \times \hat{j} &= 0 \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} & \hat{i} \times \hat{k} &= -\hat{j} & \hat{k} \times \hat{k} &= 0 \end{aligned}$$

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES DADOS POR SUS COMPONENTES:

Si $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ y $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$, entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \rightarrow \text{aplicando propiedad distributiva}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_x \cancel{\hat{i}\hat{i}} + a_x b_y \hat{i}\hat{x}\hat{j} + a_x b_z \hat{i}\hat{x}\hat{k} + a_y b_x \hat{j}\hat{x}\hat{i} + a_y b_y \cancel{\hat{j}\hat{j}} + a_y b_z \hat{j}\hat{x}\hat{k} + a_z b_x \hat{k}\hat{x}\hat{i} + a_z b_y \hat{k}\hat{x}\hat{j} + a_z b_z \cancel{\hat{k}\hat{k}}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y \hat{k} + a_x b_z (-\hat{j}) + a_y b_x (-\hat{k}) + a_y b_z \hat{i} + a_z b_x \hat{j} + a_z b_y (-\hat{i})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

Las componentes de $\vec{a} \times \vec{b}$ se recuerdan fácilmente desarrollando:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Que solo tiene significado mnemotécnico, ya que no se disponen determinantes de matrices cuyo elemento son vectores.

Halla el área del paralelogramo que tiene por lados adyacentes a los vectores

$$\vec{a} = (2, -1, 3) \text{ y } \vec{b} = (-1, 2, 6)$$

Solución: para calcular el área debemos calcular el módulo del producto vectorial de los vectores

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-6 - 6) - \hat{j}(12 + 3) + \hat{k}(4 - 1) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (-12, -15, 3)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + (-15)^2 + (3)^2} = \sqrt{378}$$

Dados $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$ y $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$; ¿es lo mismo $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$? ¿cómo son estos vectores?

Halla vectores unitarios ortogonales a los vectores \vec{a} y \vec{b}

Solución:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 - 0) - \hat{j}(1 - 0) + \hat{k}(3 - 2) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, 1)$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0 - 1) - \hat{j}(0 - 1) + \hat{k}(2 - 3) \Rightarrow \vec{b} \times \vec{a} = (-1, 1, -1)$$

Estos vectores son iguales y opuestos

Un vector unitario ortogonal simultáneamente a \vec{a} y \vec{b} sería $\vec{u} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$

PRODUCTO MIXTO

Combina el producto vectorial con el producto escalar. Es el número real que se obtiene de la siguiente operación: $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$. Se suele indicar por: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (verificarlo)}$$

*intercambiando dos filas entre si cambiando el signo del determinante. Por lo tanto:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = -(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c})$$

*intercambiando dos veces se conserva el signo: $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a})$

*como el producto escalar es conmutativo, se tiene además. $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

INTERPRETACION GEOMETRICA

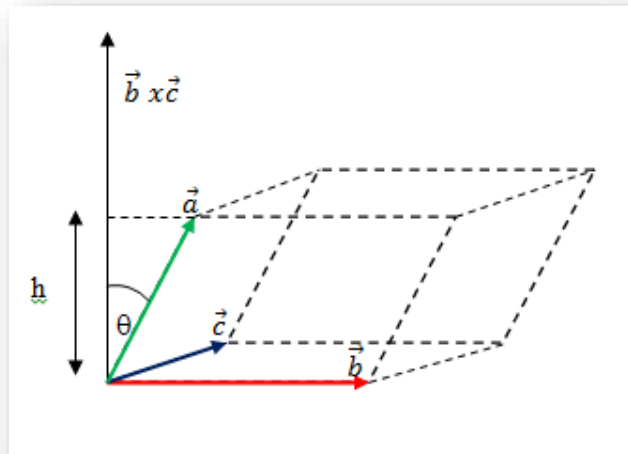
El valor absoluto del producto mixto, representa el volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} como aristas concurrentes.

(Suponiendo que \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} no son coplanares)

$$Vol = base \times altura = |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \theta; \quad \text{donde} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}|}$$

$$Vol = |\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}|}$$

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



¶ Ejercitación 8

Hallar el volumen del tetraedro que tiene como

arista concurrentes a los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} donde $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$.

Observación: el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo.

VECTORES COPLANARES

Tres vectores no nulos son coplanares, si uno de ellos es combinación lineal de los otros dos.

Supongamos que $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$. En este caso, se anula el producto mixto.

Resumiendo: tres vectores no nulos son coplanares sí y solo sí su producto mixto se anula. A partir de la interpretación geométrica, podemos decir que si los vectores son coplanares cumple que el volumen es cero.

TRABAJO PRÁCTICO VECTORES EN \mathbb{R}^3

- En la figura 1, indica las coordenadas de los puntos (con una nomenclatura adecuada) en \mathbb{R}^3 , situados en cada uno de los vértices, y determina:
 - los vectores $\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{BK}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{BC}$,
 - los vectores $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OA}$ ¿qué posición tienen?
 - Nombra al menos dos vectores que se encuentren en el plano xy, en el plano yz y en el plano zx
 - Nombra al menos dos vectores paralelos a los ejes coordenados
 - Calcula los módulos de los vectores hallados en el ítem a

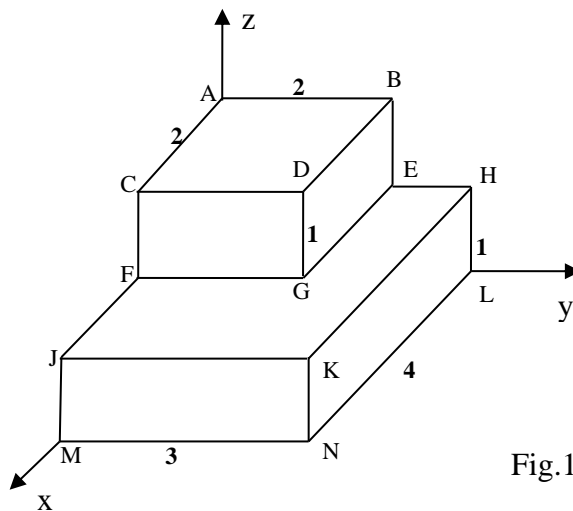


Fig.1

- Analiza previamente como están ubicados los vectores (respecto a los ejes y/o planos coordenados). Luego calcula el módulo y los cosenos directores de los mismos
 - $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
 - $\vec{a} = 3\hat{i}$
 - $\vec{a} = 4\hat{i} + \hat{j}$
 - $\vec{a} = (0,1,3)$
 - $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{k}$
- Dadas las componentes de un vector $\vec{a} = (4, -4, z)$, halla z , sabiendo que el $|\vec{a}| = 6$
- Halla el punto B con el que coincide el extremo del vector $\vec{a} = (3, -1, 4)$ si su origen coincide con el punto $A(1, 2, -3)$
- Determina el origen del vector $\vec{a} = (2, -3, -1)$ si su extremo coincide con el punto $B(1, -1, 2)$
- Si $B = P_m$ es el punto medio del segmento determinado por los puntos $R(2, -2, 4)$ y $Q(1, 3, 6)$, calcula A para que \overrightarrow{AB} sea paralelo al vector $\vec{u} = (4, -3, 1)$
- Un vector forma con los ejes OX y OZ los ángulos $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. ¿Qué ángulo forma con el eje OY?
- Un vector cuya longitud es 6, forma con el eje OY un ángulo de 60° , y con el eje z un ángulo de $\pi/3$. Halla las componentes del vector unitario paralelo al mismo, y comprueba la relación fundamental de los cosenos directores
- a) Sean $P(-3, 1, 7)$ y $Q(8, 1, 7)$. Determina $|\overrightarrow{PQ}|$ y halla un vector unitario en la misma dirección.

- b) Halla un vector \vec{b} tal que $\vec{b} = 3\overrightarrow{PQ}$
- 10.** Dado el vector $\vec{u} = (-2, -8, 2)$ indica :
- ¿Cuáles de los siguientes vectores son colineales (o paralelos) con él:
 $\vec{r} = (0, -7, 1)$ $\vec{s} = (4, -1, 0)$ $\vec{t} = (1/2, 2, -1/2)$
 - El ángulo entre \vec{u} y \vec{t} y entre \vec{u} y \vec{s}
 - Un vector paralelo a \vec{t} pero de módulo $\sqrt{72}$
- 11.** Dado el módulo de un vector $|\vec{a}| = 2$ y los ángulos $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Calcula las componentes del vector sobre los ejes coordenados.
- 12.** Si $|\vec{a}| = 4$ y sus ángulos directores son $\alpha = \pi/4$; $\beta = \pi/3$; $\gamma = \pi/3$
- Calcula sus componentes
 - Halla el extremo de su representante en $A(3, 2, 5)$
 - Halla el origen de su representante, cuyo extremo es $B(2, 4, -1)$
- 13.** Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre cero y $\pi/2$. ¿Cuál es el vector?
- 14.** Encuentra un vector de magnitud 12 que tenga la misma dirección que el vector del problema anterior.
- 15.** Si $\vec{a} = (2, 1, -1)$ y $\vec{b} = (1, -1, 2)$. Halla un vector no nulo \vec{c} tal que $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$
- 16.** Halla un vector $\vec{w} = (x, y, 1)$ que sea ortogonal tanto a $\vec{u} = (3, 1, -1)$ como a $\vec{v} = (-3, 2, 2)$
- 17.** Sean $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$. Halla escalares α y β tales que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ sea un vector no nulo ortogonal a \vec{u} .
- 18.** ¿Para qué valor de α si existe, los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{v} = \alpha\vec{i} - \alpha\vec{j} + \vec{k}$ son perpendiculares?
- 19.** Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2, 3\beta)$ y $\vec{v} = (4, \alpha, 2)$, determina si existen los valores de α y β tal que a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ y b) $\vec{u} \parallel \vec{v}$
- 20.** Encuentra todos los vectores ortogonales a $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ de segunda componente 4.
- 21.** Encuentra la proyección escalar y el vector de proyección de \vec{c} sobre \vec{a} .
- $$\vec{a} = (4, 2, 0), \quad \vec{c} = (1, 1, 1)$$
- $$\vec{a} = (-1, -2, 2) \quad \vec{c} = (3, 3, 4)$$
- 22.** Halla dos vectores unitarios ortogonales a $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y a $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
- 23.** Utiliza el producto cruz para hallar el seno del ángulo formado por los vectores del problema anterior. Verifica el resultado empleando el producto escalar.
- 24.** Calcula el área del paralelogramo cuyos vértices adyacentes son $(1, -2, 3)$; $(2, 0, 1)$ y $(0, 4, 0)$

25. Dados los puntos $A(2,3,-1)$; $B(1,0,2)$ y $C(3,1,1)$, halla $\vec{v} // \overrightarrow{AB}$ tal que \vec{v} y \overrightarrow{AC} determinan un paralelogramo de $10\sqrt{2}$.
26. Sean los puntos $A(-1,2,3)$; $B(1,1,1)$ y $C(2,-1,3)$;
- Investiga si están o no alineados.
 - Si no lo están, determina el paralelogramo de lados AB y AC
27. Determina el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores indicados son tres de sus aristas: $\vec{o} = \hat{i} + \hat{j}$; $\vec{p} = -\hat{i} + 4\hat{j}$; $\vec{q} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$
28. El volumen de un paralelepípedo es 18 siendo sus lados los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$; $\vec{v} = (2,3,1)$ y $\vec{w} = (\alpha, 1, 2)$. Calcula $\alpha \in \mathbb{R}$, si existe, de modo que se cumpla la proposición precedente.
29. Halla $\alpha \in \mathbb{R}$, si existe, tal que $2\hat{i} + \alpha\hat{j} - 4\hat{k}$; $-3\alpha\hat{j} + \hat{i} + 2\hat{k}$; y $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, sean coplanares.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

30. Encuentra un vector \vec{w} paralelo al eje z, tal que $|\text{Proy}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w})| = 5$, siendo $\vec{u} = (3, -5, 2)$ y $\vec{v} = (2, -1, 2)$
31. Demuestra que siendo \vec{u} , \vec{v} no nulos, es verdadera la siguiente proposición:
 $|\vec{u}| = 2|\vec{v}| \wedge \text{áng.}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{Proy}_{\vec{v}}(\vec{u} - \vec{v}) = 0$
32. Sean $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$
- Halla un vector \vec{b} tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. ¿Hay más de una solución?
 - Halla un vector \vec{b} tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. ¿Hay más de una solución?
33. Determina el vector \vec{x} si se sabe que es perpendicular a $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (1, -2, 3)$ y satisface la condición $\vec{x} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = -6$
34. Dado los vectores $\vec{u} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{v} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{w} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. Halla las proyecciones escalares y vectoriales:
- $\text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{w} + \vec{v})$
 - $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}$
 - $\text{Proy}_{\vec{w}}\vec{v}$
35. Sean los vectores
- | | | |
|----------------------------|------------------------|-------------------------|
| a. $\vec{r} = (1, 0, 6)$ | $\vec{s} = (2, 3, -8)$ | $\vec{t} = (8, -5, 6)$ |
| b. $\vec{r} = (-2, 3, -2)$ | $\vec{s} = (1, -1, 0)$ | $\vec{t} = (-1, 2, -2)$ |
- Encuentra:
- el área del paralelogramo determinado por \vec{r} y \vec{s} , \vec{s} y \vec{t} , \vec{r} y \vec{t}
 - el volumen del paralelepípedo determinado por \vec{r} , \vec{s} y \vec{t}
36. Sean los vectores $\vec{r} = (5, 0, 1)$, $\vec{s} = (3, -2, 0)$, $\vec{t} = (-4, 1, x)$. Halla x, de modo que:
- los tres vectores determinen un paralelepípedo de volumen 5.
 - los tres vectores resulten coplanares

LA ECUACION DEL PLANO

Mientras que una ecuación con dos variables corresponde a una curva en dos dimensiones, una ecuación con tres variables define una superficie en el espacio tridimensional. La ecuación más sencilla de tres variables es la ecuación lineal del plano

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Esta ecuación puede tomar varias formas, dependiendo de la información dada o de la información requerida.

Consideremos el plano que contiene el punto $P(x_p, y_p, z_p)$, un punto variable $X(x, y, z)$ y un vector \vec{n} no nulo, normal al plano de componentes $\vec{n} = (a, b, c)$.

Entre los puntos P y X queda determinado un vector contenido en el plano.

$$\overrightarrow{PX} = (x, y, z) - (x_p, y_p, z_p)$$

$$\overrightarrow{PX} = (x - x_p, y - y_p, z - z_p)$$

En consecuencia, ambos vectores, el normal al plano \vec{n} y el contenido en el plano \overrightarrow{PX} serán perpendiculares y por lo tanto su producto escalar dará cero. De modo que la ecuación vectorial del plano puede escribirse

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \text{ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO}$$

Realizando el producto escalar entre ambos vectores tendremos

$$(x - x_p, y - y_p, z - z_p) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_p) + b(y - y_p) + c(z - z_p) \text{ Aplicando la propiedad distributiva y agrupando términos (-)}$$

$$ax + by + cz - ax_p - by_p - cz_p = 0$$

$$ax + by + cz = ax_p + by_p + cz_p \text{ siendo } d = ax_p + by_p + cz_p$$

$$ax + by + cz = d \rightarrow \text{ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO}$$

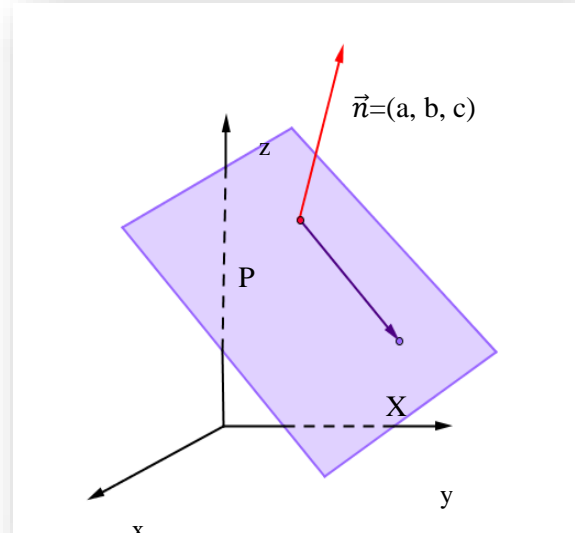
- Otra forma de llegar a la misma ecuación es:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ Aplicando propiedad distributiva y pasaje de términos}$$

$$\overrightarrow{OX} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} \rightarrow (x, y, z) \cdot (a, b, c) = (x_p, y_p, z_p) \cdot (a, b, c)$$

$$ax + by + cz = ax_p + by_p + cz_p \text{ donde } ax_p + by_p + cz_p = d$$

Es decir, dado un plano π determinado por un punto P y un vector normal \vec{n} , le podemos hacer corresponder una ecuación de este tipo, donde los coeficientes de las variables x, y, z corresponden al vector normal y el término independiente será $d = ax_p + by_p + cz_p$



La terna ordenada (a, b, c) que define el vector normal \vec{n} , recibe el nombre de sistema de números directores del plano. Cualquier otra terna del tipo $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ con $\lambda \neq 0$, también constituye un sistema de números directores del plano, pues el vector $\vec{n} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ es también normal al plano.

Halla la ecuación vectorial y la ecuación general del plano al cual pertenece $P(4, -2, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (-1, 1, 3)$. Da el conjunto solución de todos los puntos que pertenecen al plano y luego elige un punto en particular.

Solución: $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = (x, y, z) - (4, -2, 7) = (x - 4, y + 2, z - 7)$

Se tiene la ecuación vectorial $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$

$$[(x - 4)\vec{i} + (y + 2)\vec{j} + (z - 7)\vec{k}] \cdot (-\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 0$$

que en coordenadas cartesianas puede escribirse:

$$(x - 4, y + 2, z - 7) \cdot (-1, 1, 3) = 0$$

Realizando el producto entre las componentes respectivas

$-(x - 4) + (y + 2) + 3(z - 7)$ de la cual se obtiene

$$-x + y + 3z + 4 + 2 - 21 = 0$$

Se tiene la ecuación general del plano

$$-x + y + 3z = 15$$

Validación: los coeficientes de las variables x, y, z son $-1, 1$ y 3 que corresponden al vector normal, si reemplazamos el punto $P(4, -2, 7)$ en dicha ecuación debe cumplirse la igualdad

$$-(4) + (-2) + 3(7) = 15$$

Para determinar todos los puntos que pertenezcan al plano, despejamos en la Ecuación General una de las variables (la más fácil, en nuestro caso x)

$$x = y + 3z - 15 \quad \text{¿Qué significado tiene esta ecuación?}$$

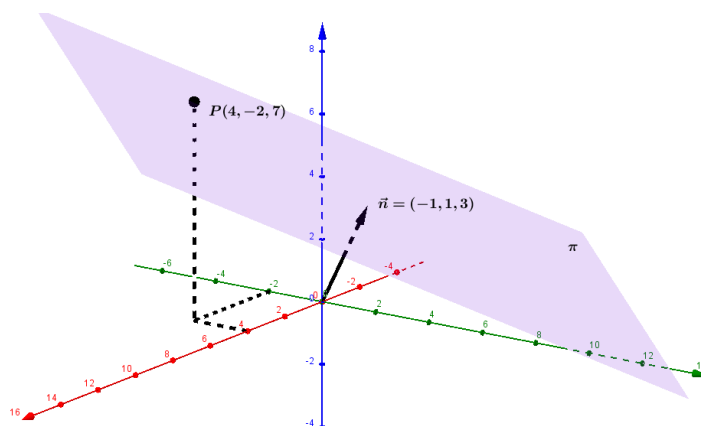
x depende de los valores de y, z por lo tanto es la variable dependiente, las variables y, z son las variables independientes (*que asumen cualquier valor*) por lo tanto el conjunto solución será la terna:

$$S = \{(y + 3z - 15, y, z)\}$$

Para determinar otro punto del plano, basta darle valores a y, z por ejemplo

$$y = 0; z = 3 \rightarrow x = -6 \rightarrow$$

$$S = \{(-6, 0, 3)\}$$



ECUACIÓN SEGMENTARIA DEL PLANO

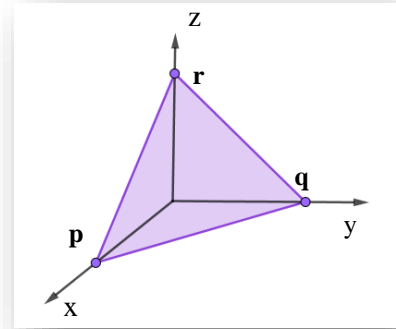
Para representar un plano se necesita conocer la intersección del plano con cada uno de los ejes coordenados.

Si el plano no es paralelo a planos ni a ejes coordenados, corta a los ejes en tres puntos $P_1(p,0,0)$; $P_2(0,q,0)$ y $P_3(0,0,r)$. Entonces la ecuación segmentaria del plano estará en función de p , q y r .

$ax + by + cz = d$ dividiendo ambos miembros por d

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = \frac{d}{d}$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$



Demostración:

Intersección eje x las coordenadas de un punto en el eje x tienen a: $y = z = 0$ sustituyendo en la ecuación

$$a \cdot x + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d \quad a \cdot x = d \quad x = \frac{d}{a} \quad P(p,0,0)$$

Intersección eje y las coordenadas de un punto en el eje y tienen a $x = z = 0$ sustituyendo en la ecuación

$$a \cdot 0 + b \cdot y + c \cdot 0 = d \quad b \cdot y = d \quad y = \frac{d}{b} \quad Q(0,q,0)$$

Intersección eje z las coordenadas de un punto en el eje z tienen a $x = y = 0$ sustituyendo en la ecuación

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot z = d \quad c \cdot z = d \quad z = \frac{d}{c} \quad R(0,0,r)$$

Dado el plano $\pi: 2x + 3y - 6z = 12$, escríbelo en forma segmentaria y grafica

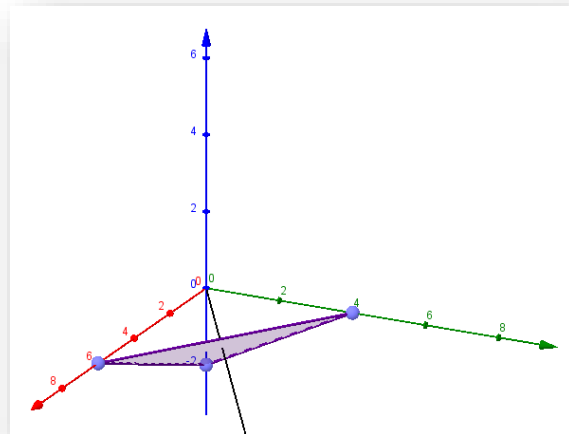
Solución: dividiendo ambos miembros por 12

$$\frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} - \frac{6z}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{x}{\frac{12}{2}} + \frac{y}{\frac{12}{3}} + \frac{z}{\frac{12}{-6}} = 1$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-2} = 1$$

Siendo 6, 4 y -2 las intersecciones en los ejes coordenados



Determina la ecuación general y segmentaria del plano cuyas intersecciones con los ejes coordenados son los puntos P(2,0,0) , Q (0,4,0) y R (0,0, 6) respectivamente.

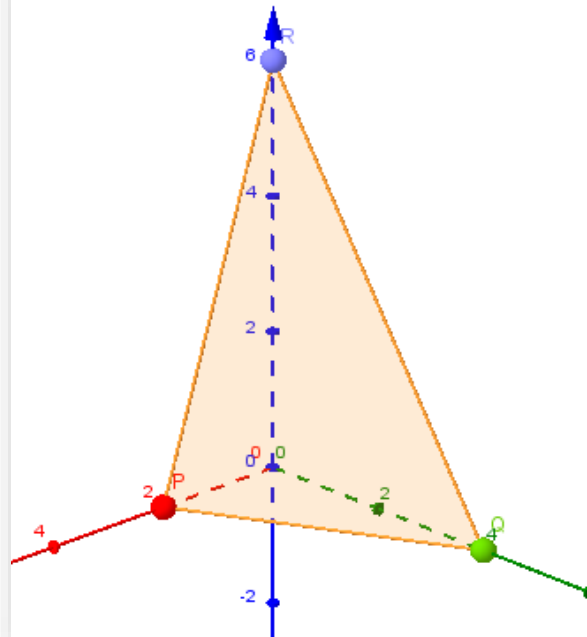
Solución: ya que sabemos las intersecciones en los ejes coordenados, primero determinamos la ecuación segmentaria

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$$

Sacando común denominador 12

$$\frac{6x + 3y + 2z}{12} = 1 \rightarrow$$

$$6x + 3y + 2z = 12 \text{ ec. gral.}$$



ECUACIÓN DEL PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS

Procedimiento:

- Si $P, Q, R \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \subset \pi \wedge \overrightarrow{PR} \subset \pi$ (se lee vectores incluidos en el plano)
- $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (a, b, c) \Rightarrow \vec{n} \perp \pi$ (se lee el vector normal es perpendicular al plano)
- Si $P(x_1, y_1, z_1) \in \pi$ reemplazando en la ecuación del plano $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$ se calcula “d”

Dados P (2,0,0), Q (0,4,0) y R (0,0, - 6) que pertenecen al plano π , calcula la ecuación general del plano.(Observa que son los mismos puntos del ejemplo anterior)

Solución: entre los puntos dados se determinan dos vectores $\overrightarrow{PQ} = (-2,4,0)$; $\overrightarrow{PR} = (-2,0,6)$, los cuales estarán incluidos en el plano. Luego se realiza el producto vectorial entre ellos para obtener el vector normal.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -24\hat{i} - 12\hat{j} + 8\hat{k} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-24, -12, 8) \Rightarrow$$

$$\vec{n} = (6, 3, -2)$$

$$6x + 3y - 2z = d$$

Reemplazando P en la ecuación del plano se calcula “d” $6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = d$

$$6x + 3y - 2z = 12 \quad \text{Comprueba que sucede si reemplazas por los otros puntos}$$

Observación: se puede ver que en los dos últimos ejercicios los dos planteos son válidos y se llega a la misma ecuación.

CASOS PARTICULARES

PLANO QUE PASA POR EL ORIGEN DE COORDENADAS

reemplazando el punto (0,0,0) en la ecuación general del plano en (x, y, z) tendremos:

$$ax + by + cz = d \rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d \quad d = 0 \rightarrow ax + by + cz = 0$$

Es decir si el punto pertenece al plano entonces sus coordenadas deben verificar la ecuación.

PLANO PARALELO AL EJE Z Si $\pi //$ al eje z entonces

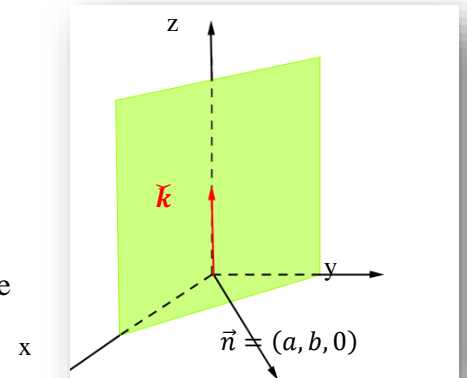
$$\pi // \vec{k} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{k}, \rightarrow \vec{n} = (a, b, 0);$$

La Ecuación General será $ax + by = d$

La Ecuación Segmentaria será

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} = 1$$

se puede observar que no corta al eje z, su ausencia en la ecuación se debe a que su coeficiente $c = 0$



PLANO PARALELO AL EJE Y Si $\pi //$ al eje y entonces

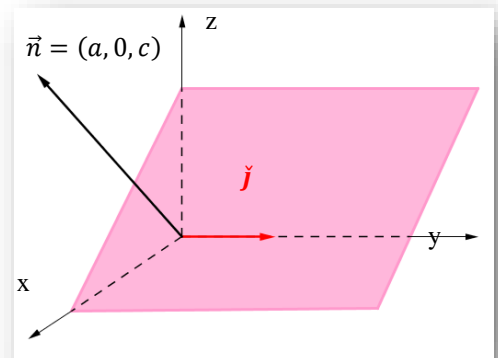
$$\pi // \vec{j} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{j} \rightarrow \vec{n} = (a, 0, c)$$

La Ecuación General será $ax + cz = d$

La Ecuación segmentaria

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

se puede observar que no corta al eje y, su ausencia en la Ecuación se debe a que su coeficiente $b = 0$



PLANO PARALELO AL EJE X Si $\pi //$ al eje x entonces

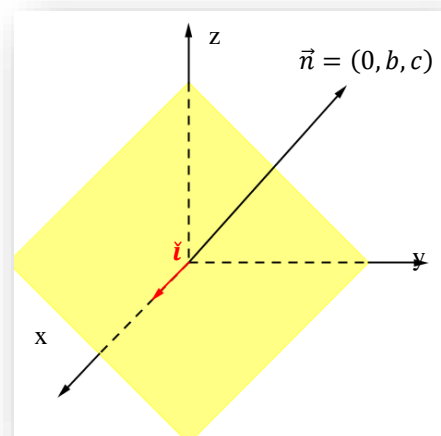
$$\pi // \vec{i} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{i} \rightarrow \vec{n} = (0, b, c)$$

La Ecuación general será $by + cz = d$

La Ecuación Segmentaria

$$\frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

se puede observar que no corta al eje x, su ausencia en la ecuación se debe a que su coeficiente $a = 0$



Observación: Podemos concluir, diciendo que si un plano es paralelo a uno de los ejes coordenados, su ecuación carece de la variable correspondiente a ese eje.

Si dos coeficientes del vector normal son nulos, entonces el plano π , será paralelo a uno de los planos coordenados

Si π es paralelo al plano $xy \rightarrow \vec{n} // \vec{k} \rightarrow \vec{n} = (0, 0, c) \rightarrow 0x + 0y + cz = d \rightarrow z = \frac{d}{c}$

Si π es paralelo al plano $xz \rightarrow \vec{n} // \vec{j} \rightarrow \vec{n} = (0, b, 0) \rightarrow 0x + by + 0z = d \rightarrow y = \frac{d}{b}$

Si π es paralelo al plano $yz \rightarrow \vec{n} // \vec{i} \rightarrow \vec{n} = (a, 0, 0) \rightarrow ax + 0y + 0z = d \rightarrow x = \frac{d}{a}$

Observación: Podemos concluir diciendo, que si un plano es paralelo a uno de los planos coordenados, su ecuación carece de las variables correspondientes a esos ejes.

ECUACIONES VECTORIALES PARAMETRICAS

Sea π un plano, $P(x_p, y_p, z_p)$ un punto del plano y \vec{u} y \vec{v} dos vectores paralelos al plano y por lo tanto por tratarse de vectores libres dichos vectores estarán contenidos en el plano.

Considerando un punto variable $X(x, y, z)$ que pertenece al plano, podemos determinar el vector \overrightarrow{OX} , expresándolo como una suma vectorial de dos vectores :

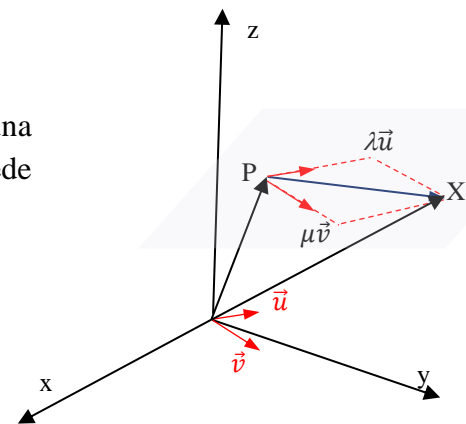
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} \quad (1)$$

Siendo \overrightarrow{PX} un vector del plano, el cual a su vez es una combinación lineal de los vectores \vec{u} y \vec{v} . Por lo que éste puede expresarse como:

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad \text{siendo } \lambda \text{ y } \mu \text{ dos escalares.}$$

Reemplazando en (1)

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$



Si consideramos las componentes de los vectores, podemos desarrollarla en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p + \lambda u_x + \mu v_x \\ y_p + \lambda u_y + \mu v_y \\ z_p + \lambda u_z + \mu v_z \end{pmatrix} \quad \text{ECUACIONES VECTORIALES PARAMETRICAS}$$

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_p + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_p + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases} \quad \text{ECUACIONES CARTESIANAS PARAMETRICAS}$$

Halla las ecuaciones vectorial paramétrica y general del plano determinado por los tres puntos P(1,0,2), Q(2,2,2) y R(0,1,5). Grafica

Solución: tres puntos determinan 2 vectores, por ejemplo $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1,2,0)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-1,1,3)$

Se sustituye en las ecuaciones vectoriales paramétricas, uno de los puntos dados y los vectores escalados

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda - \mu \\ 2\lambda + \mu \\ 2 + 3\mu \end{pmatrix} \text{ Ec. Vect. Paramétricas} \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 2 + 3\mu \end{cases} \text{ Ec. Cartesianas Paramétricas}$$

- Para hallar la ecuación general del plano habrá que realizar $(\vec{u} \times \vec{v})$ que nos dará el vector \vec{n} .

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

Con el vector \vec{n} y el punto P (puede ser cualquiera) \rightarrow

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \pi: 6x - 3y + 3z = 12$$

Validación: compruebo reemplazando los puntos Q y R en π , se debe verificar la igualdad

$$\checkmark \quad \pi: 6 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12$$

$$\checkmark \quad \pi: 6 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 12$$

Para graficar es conveniente la ecuación segmentaria

$$\frac{x}{\frac{12}{6}} + \frac{y}{\frac{12}{-3}} + \frac{z}{\frac{12}{3}} = \frac{12}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{4} = 1$$

¶ Ejercitación 1

1. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto P (3, 2,1) y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (3, -1, 0)$; $\vec{v} = (6, -1, 1)$
2. Halla la ecuación del plano que es perpendicular en su punto medio al segmento P (2, 1,5); Q(4,1, -3)

ECUACION NORMAL DEL PLANO

Si a la ecuación general del plano la dividimos por el módulo del vector normal, los coeficientes de las variables x , y , z corresponden a los cosenos directores

$$\frac{ax}{|\vec{n}|} + \frac{by}{|\vec{n}|} + \frac{cz}{|\vec{n}|} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

$$\cos \alpha x + \cos \beta y + \cos \gamma z = \delta$$

δ : es la distancia del plano al origen

$$\delta = \frac{d}{|\vec{n}|} = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Demostración:

La distancia del plano al origen de coordenadas =

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1}$$

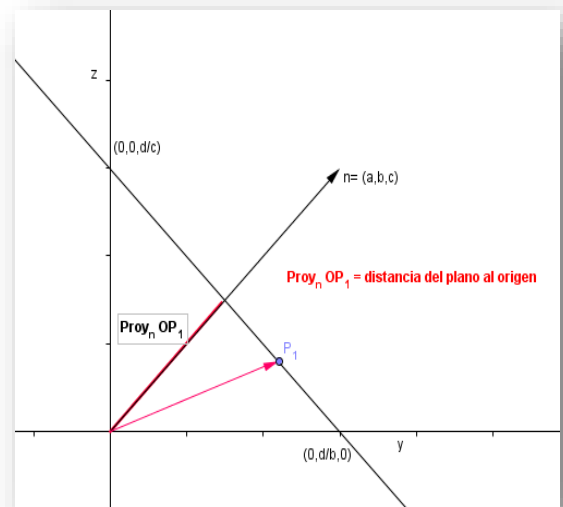
Por lo tanto:

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x_1, y_1, z_1) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1} = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Se comprueba que :

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_1} = \delta$$



Dado el plano $\pi: 2x - 2y + z - 6 = 0$ llevarlo a la forma normal, comprobar que δ es la distancia del plano al origen de coordenadas

Solución: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$

Para llevarlo a la forma normal dividimos el plano π por $|\vec{n}| = 3$

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{z}{3} = \frac{6}{3} \rightarrow \delta = 2$$

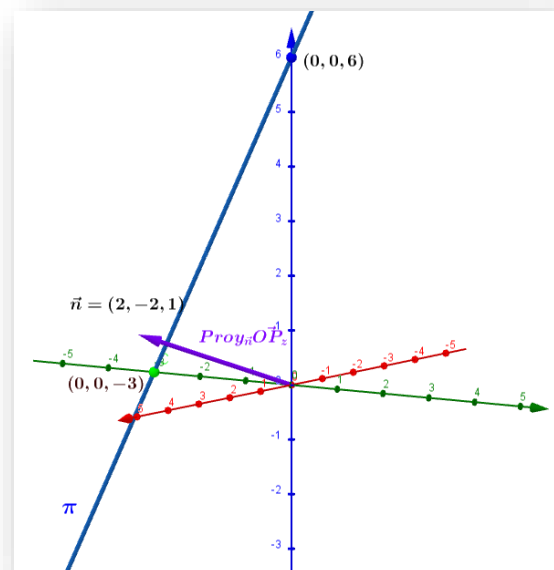
Haciendo por proyección tendríamos que

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_z} = \frac{\overrightarrow{OP_z} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(0,0,6) \cdot (2,-2,1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_z} = \frac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

Se comprueba que :

$$\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OP_z} = \delta$$



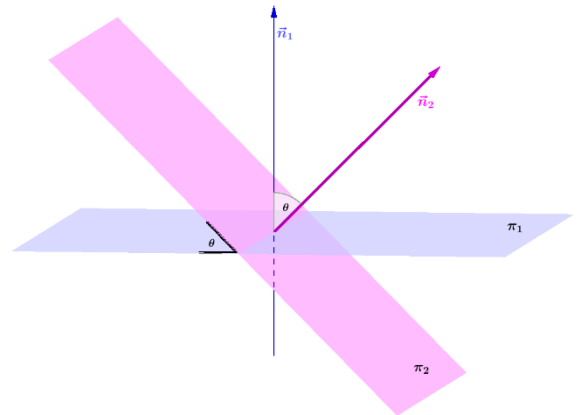
ANGULO ENTRE DOS PLANOS

En \mathbb{R}^3 dos planos o son paralelos o se cortan en una recta que es su intersección. Si los planos son paralelos decimos que forman un ángulo nulo.

El ángulo que forman las secciones normales resulta ser el mismo que forman sus vectores normales, según como estén orientados dichos vectores normales, podrá ser un ángulo θ o su suplementario ($180^\circ - \theta$).

Dados dos planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ el ángulo entre los planos estará en relación con los vectores normales de ambos. De acuerdo a lo visto en ángulos entre vectores, se tiene:

$$\cos \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



CONDICIÓN DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Estas condiciones surgen también de las condiciones de sus vectores normales. Dados los planos:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad / \quad \vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad / \quad \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

Diremos que:

- Si $\pi_1 // \pi_2$ entonces $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \rightarrow (a_1, b_1, c_1) = \lambda (a_2, b_2, c_2)$

Igualando las componentes

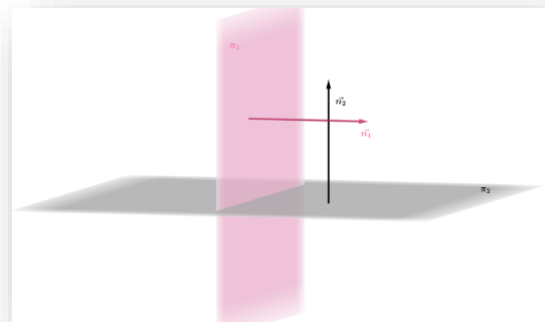
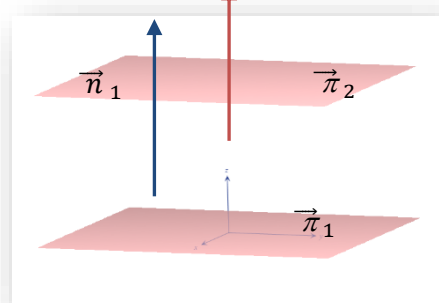
$$\begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \rightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1} \\ a_2 = \lambda b_2 \rightarrow \lambda = \frac{a_2}{b_2} \\ a_3 = \lambda b_3 \rightarrow \lambda = \frac{a_3}{b_3} \end{cases}$$

Nos dice que dos planos son paralelos cuando se cumple que la razón de las componentes es la misma

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

- Si los planos son perpendiculares $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$



TRABAJO PRÁCTICO: EL PLANO

Nociones básicas

1. En los siguientes ejercicios, indica el vector normal del plano, el conjunto solución, un punto que pertenezca al mismo, y realiza su gráfica.

1.1 $x + 6y + 2z = 2$

1.4 $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1$

1.7 $-3y = \frac{x}{2} + \frac{z}{3}$

1.2 $x + 3y = -6$

1.5 $y = 5$

1.8 $2z + 3y = 6$

1.3 $z = 0$

1.6 $2x - 12z = 12$

1.9 $x = 2$

2. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto M_i y cuyo vector normal es \vec{n}_i

$M_1(2,1,-1)$

$M_2(0,0,0)$

$M_3(3,0,5)$

$M_4(0,-2,\sqrt{2})$

$\vec{n}_1 = (1,-2,3)$

$\vec{n}_2 = (5,0,-3)$

$\vec{n}_3 = (0,0,1)$

$\vec{n}_4 = (0,-1,-\sqrt{2})$

3. Dados los puntos $M_1(3,-1,2)$ y $M_2(4,-2,-1)$. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 y es perpendicular al vector $\overrightarrow{M_1M_2}$

Ecuación segmentaria del plano

4. En el ejercicio 1 (de nociones básicas o introducción), halla:

4.1 Los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados.

4.2 Escribe los planos en forma segmentaria.

5. Un plano pasa por el punto $M_1(6,-10,1)$ e intercepta en el eje de abscisas el segmento $p = -3$ y en el eje de cotas el segmento $r = 2$. Halla la ecuación segmentaria.
6. Un plano pasa por los puntos $M_1(1,2,-1)$ y $M_2(-3,2,1)$ e intercepta en el eje de ordenadas el segmento $q = 3$. Halla la ecuación segmentaria.
7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(2,-3,-4)$ y que intercepta en los ejes coordenados segmentos de igual magnitud y diferentes de cero (se supone que cada segmento parte del origen de coordenadas).
8. Halla la ecuación del plano que es paralelo al vector $\vec{v} = (2,2,-1)$ y que intercepta en los ejes coordenados Ox y Oy los segmentos $p = 3$ y $q = -2$.
9. Halla la ecuación del plano que es perpendicular al plano $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ y que intercepta en los ejes coordenados Ox y Oy los segmentos $p = -2$, $q = 2/3$

Ecuación del plano determinado por tres puntos.

10. Los tres puntos determinan un plano π_i :

$\pi_1: (1,1,-1); (3,3,2); (3,-1,-2)$

$\pi_2: (1,2,3); (2,3,4); (-1,7,-2)$

$\pi_3: (0,0,0); (1,1,1); (3,2,-1)$

Decir cuáles de los siguientes puntos están contenidos en dichos planos.

$$\pi_1: A(2, 2, 1/2) \quad B(4, 0, -1/2) \quad C(-3, 1, -3) \quad D(3, 1, 3) \quad O(0, 0, 0)$$

$$\pi_2: A(2, -2, 1/2) \quad B(-1, 3, -4) \quad C(-1, 0, 1) \quad D(2, 4, 6) \quad E(1, 1, 24/7)$$

$$\pi_3: A(2, 2, 2) \quad B(0, 4, -1/2) \quad C(1, 2/3, -1/3) \quad D(-3, -2, 1) \quad E(0, 1, 1)$$

D. Ecuación vectorial paramétrica del plano

11. Halla la ecuación del plano que pasa por $M_1(3, 4, -5)$ y es paralelo a los dos vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (1, -2, 1)$

12. Determina si los siguientes planos son paralelos:

$$12.1 \quad \alpha_1: (1, -2, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(2, 3, 4) \quad \beta_1: (2, 4, 1) + \delta(3, 5, 5) + \varphi(1, 1, 3)$$

$$12.2 \quad \alpha_2: (3, 2, 1) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) \quad \beta_2: (1, 1, 1) + \delta(1, 0, 0) + \varphi(0, 0, 1)$$

13. Sea $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$ donde $P(1, 2, -3)$, $\vec{u} = (3, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 4)$. Determina cuáles de los siguientes puntos están en el plano

$$P(1, 2, 0) \quad Q(1, 2, 1) \quad R(6, 4, 6) \quad S(6, 6, 6) \quad T(6, 6, -5)$$

14. Determina la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $P_0(2, 3, -4)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

15. Dado el punto P y el plano π , determina la ecuación del plano β , paralelo a π y que contiene a

$$P(2, 4, 5) \quad \pi: \begin{cases} x = -1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$$

16. Si π es el plano determinado por $P(1, -1, 0)$; $\vec{u} = (3, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 2, 0)$, determina:

16.1 la ecuación paramétrica de π

16.2 z_1 sabiendo que $P_1(10, -5, z_1) \in \pi$

17. Dado el plano α en forma paramétrica, expresarlo en forma vectorial, general, normal y segmentaria:

$$17.1 \begin{cases} x = 2 + 7\mu \\ y = 2 + \lambda - 3\mu \\ z = -5 + 13\lambda \end{cases} \quad 17.2 \begin{cases} x = 5 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 6 - \lambda + 2\mu \\ z = 7 + 5\lambda - \mu \end{cases} \quad 17.3 \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 6 - \lambda + 2\mu \\ z = 7\mu \end{cases}$$

E. Ecuación normal del plano

18. Determina cuáles de las ecuaciones de los planos dados a continuación están escritas en la forma normal:

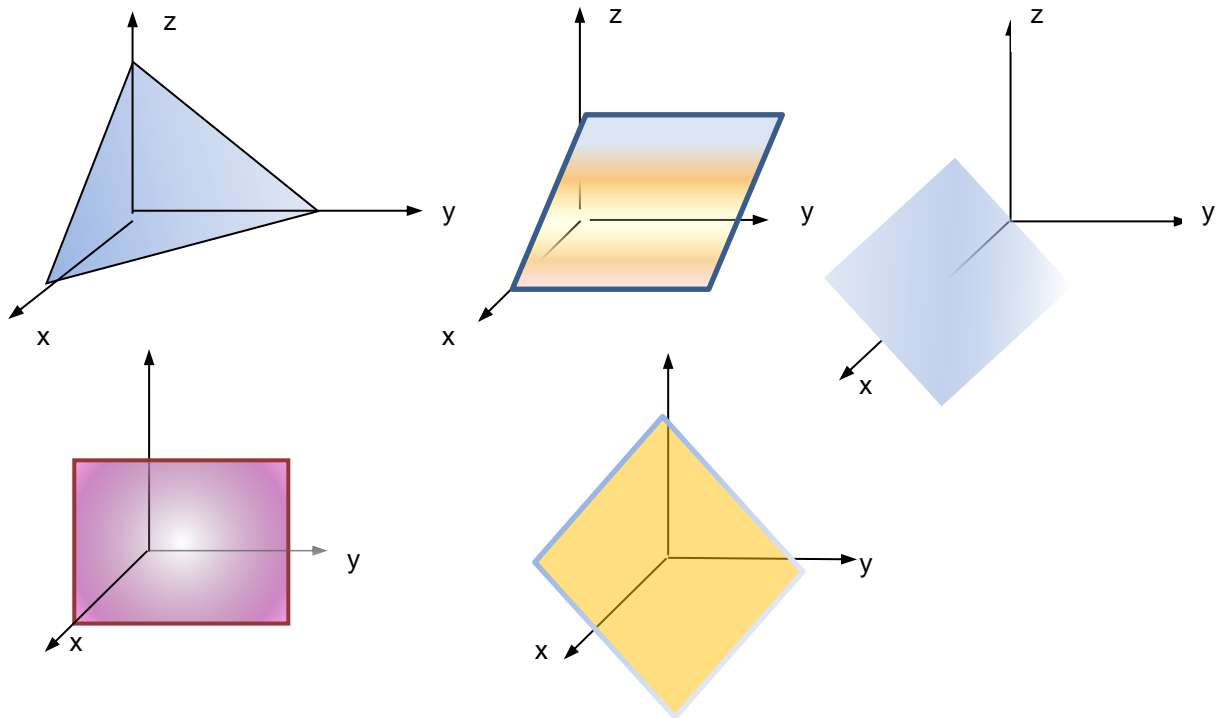
$$18.1 \quad \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = \quad 18.2 \quad \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 3 \quad 18.3 \quad \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 = 0$$

19. Reduce a la forma normal cada una de las ecuaciones de los planos siguientes:

$$19.1 \quad 2x - 2y + z = 18 \quad 19.2 \quad \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0 \quad 19.3 \quad 3x - 4y - 1 = 0$$

Ejercicios surtidos

20. Halla la ecuación general, segmentaria, paramétrica y normal de los siguientes planos:



21. Determina la ecuación del plano que satisfaga las condiciones indicadas.

- Contiene a $(3,6,12)$ y es paralelo al plano xy .
- Contiene a $(0,6,4)$ y es paralelo al plano xz
- Contiene a $(-7,-5,18)$ y es paralelo al plano zy
- Pasa por el punto $P(2,3,-5)$ y es paralelo al plano $x + y - 4z = 1$
- Contiene a $(1,0,-5)$ y es paralelo al plano $x + y - 4z = 1$
- Contiene al punto $P(1,3,4)$ y es paralelo al plano $2y + 4z = 10$
- Es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos $(-1,3,2)$ y $(2,-4,5)$
- Pasa por $P_1(3,-2,2)$ y $P_2(4,2,3)$ y es paralelo al eje "x"
- Pasa por el eje Ox y por el punto $M_1(4,-1,2)$
- Pasa por el eje Oy y por el punto $M_2(1,4,-3)$
- Pasa por el eje Oz y por el punto $M_3(3,-4,7)$
- Contiene a $(0,3,0)$; $(0,0,5)$ y es además perpendicular al plano $7x - 3y + 6z - 4 = 0$
- Pasa por $(2,0,-1)$ y $(4,2,2)$ y es perpendicular al plano $2x - y + 4z = 0$
- Pasa por $Q(3,-2,2)$ y $R(4,2,3)$ y es paralelo al eje de ordenadas
- Es perpendicular al vector $4\vec{i} - 2\vec{j}$ pasa por el punto $(1,2,5)$
- Perpendicular al eje y en el punto $(0,4,0)$

22. Sea α el plano cuya ecuación general es $ax + by + cz + d = 0$. Establece en cada caso, la relación que deben satisfacer los coeficientes a, b, c, d de modo que:

22.1 Sea paralelo al plano $2x - y + z = 7$

22.2 Sea perpendicular al vector $(-1, 3, 5)$

22.3 Intercepte a los ejes coordenados en $x = 2, y = -1, z = 1$

22.4 Pase por el origen

22.5 Sea perpendicular al plano YZ

23. Un plano tiene como ecuación cartesiana $x + 2y - 2z + 7 = 0$ Halla:

23.1 Un vector normal de longitud uno

23.2 Los segmentos interceptados por el plano con los ejes.

23.3 La distancia del plano al origen.

Planos paralelos y perpendiculares

24. Determina para qué valores de k y m los pares de ecuaciones dadas a continuación determinan planos paralelos:

$$24.1 \quad 2x + ky + 3z - 5 = 0 \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0$$

$$24.2 \quad 3x - y + kz - 9 = 0 \quad 2x + my + 2z - 3 = 0$$

$$24.3 \quad mx + 3y - 2z - 1 = 0 \quad 2x - 5y - z = 0$$

25. Determina para que valores de k los pares de ecuaciones dadas a continuación determinan planos perpendiculares

$$25.1 \quad 3x - 5y + kz - 3 = 0 \quad x + 3y + 2z + 5 = 0$$

$$25.2 \quad 5x + y - 3z - 2 = 0 \quad 2x + ky - 3z + 1 = 0$$

$$25.3 \quad 7x - 2y - z = 0 \quad kx + y - 3z - 1 = 0$$

26. Dados los planos

$$26.1 \quad \pi_1 : 3x - y + kz = 1; \pi_2 : 9x - 3y + 2z = 8.$$

$$26.2 \quad \pi_2 : 2x + 5y - z = 3; \pi_2 : kx + y - 1/5 z = 0$$

Calcula k de modo que a) $\pi_1 // \pi_2$ b) $\pi_1 \perp \pi_2$

27. Halla la ecuación general del plano que pasa por $P(3, 0, 2)$ y es perpendicular a los planos $\pi_1: 3y - 2z + 2 = 0$ y $\pi_2: x = 0$.

28. Determina la ecuación del plano que contiene a $P(2, -1, 3)$ y es perpendicular al plano

$$\gamma: 2x + 3y - 4z = 0$$

29. Encuentra la ecuación del plano perpendicular al plano $5x + y + 4z = 0$ y que pasa por los puntos $A(3, 1, 2)$ y $B(3, 4, 4)$

30. Halla la ecuación del plano que pasa por dos puntos $M_1(1, -1, 2)$ y $M_2(3, 1, 1)$ y es perpendicular al plano $x - 2y + 3z - 5 = 0$

31. Halla la ecuación vectorial y general del plano que satisface las siguientes condiciones.

- Es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos $(-1,3,2)$ y $(2,-4,5)$
- Pasa por $R(-4,1,2)$ y es paralelo al plano $x = 5$
- Contiene al eje “z” y a $P_1(4,2,0)$
- Pasa por $P_1(3,-2,2)$ y $P_2(4,2,3)$ y es paralelo al eje “x”

32. Halla un vector de longitud 1 perpendicular a $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y al plano $x - y + 5z = 1$

Ángulo entre dos planos

33. Halla la ecuación general del plano que pasa por $P(2,1,3)$; si un vector normal \vec{n} forma los ángulos con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente: $1/3 \pi, 1/4 \pi, 1/3 \pi$

34. Determina $\alpha \in \mathbb{R}$, si existe, sabiendo que el plano $\alpha x + 4y + 3z - 12 = 0$ determina con los ejes coordenados un tetraedro contenido en el 1^{er} octante, cuyo volumen es 24

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

¿Puedes...

- escribir la ecuación de un plano que pasa por dos puntos dados y es perpendicular a un plano dado?
- reducir la ecuación de un plano de la forma general a la forma segmentaria?
- reducir la ecuación de un plano de la forma vectorial paramétrica a la forma general?
- hallar los cosenos directores de las normales a un plano cuya ecuación es conocida?
- reducir la ecuación de un plano de la forma general a la normal?
- escribir la ecuación de un plano conocidos 3 puntos no alineados?
- determinar un punto que pertenezca al plano y escribir el conjunto solución

LA ECUACIÓN DE LA RECTA EN \mathbb{R}^3

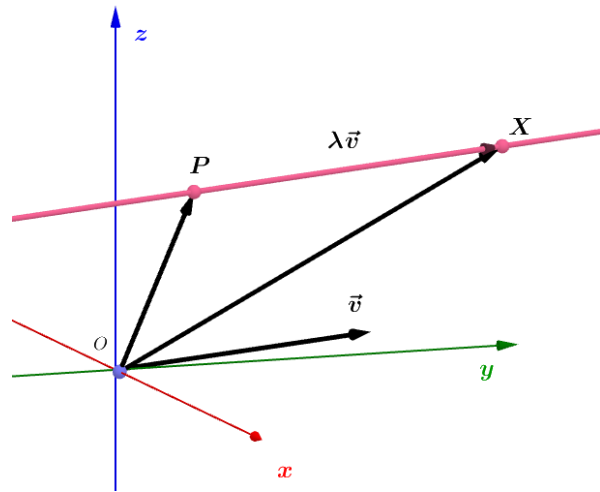
Todos estamos familiarizados con la ecuación de la recta en el plano cartesiano, con punto – pendiente, o entre dos puntos, ahora se quiere considerar desde un punto de vista vectorial

Una recta perteneciente al espacio \mathbb{R}^3 o al plano \mathbb{R}^2 , queda perfectamente determinada cuando se conocen un punto P que le pertenece y su dirección, que puede ser aportada por un vector \vec{v} no nulo que se llama vector director.

Dado un punto P y un vector no nulo \vec{v} , el conjunto de puntos del espacio:

$L = \{X / \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, es una recta que pasa por P y es paralela al vector \vec{v} . Fig. 1

Recordemos que el vector que define la dirección de L no es único, puede ser reemplazado por cualquier múltiplo escalar ($\lambda \vec{v}$), y el punto P puede reemplazarse por cualquier otro punto de la recta.



El vector \vec{v} es llamado vector director de L . las componentes de \vec{v} (no todas nulas) son los números directores de L .

Obviamente toda recta admite múltiples ternas de números directores (*¿por qué?*).

Los cosenos directores de \vec{v} (también los de $-\vec{v}$) son llamados cosenos directores de L . En consecuencia, toda recta admite dos ternas de cosenos directores y por extensión dos ternas de ángulos directores.

La ecuación $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, (1) **ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA**

es la ecuación vectorial de L y la variable λ recibe el nombre de parámetro. Esta ecuación vectorial de la recta en \mathbb{R}^3 puede escribirse como vector columna:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (1)$$

o también puede escribirse por medio de los versores $\check{i}; \check{j}; \check{k}$:

$$x \check{i} + y \check{j} + z \check{k} = (x_p \check{i} + y_p \check{j} + z_p \check{k}) + \lambda (a \check{i} + b \check{j} + c \check{k})$$

Siendo (x, y, z) las coordenadas del Punto X y (a, b, c) las componentes conocidas del vector director dado \vec{v} . De cualquiera de ellas, y como se trata de igualdad entre vectores, se obtiene:

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p + \lambda c \end{cases} \quad (2) \quad \text{ECUACIONES CARTESIANAS PARAMETRICAS}$$

Estas ecuaciones permiten obtener las coordenadas de un punto cualquiera de la recta en términos del parámetro λ ; a cada valor le corresponde una terna (x, y, z) y consecuentemente un punto, solo uno perteneciente a la recta dada.

Despejando λ en cada una de las ecuaciones del sistema (2) obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \lambda \\ \frac{y-y_p}{b} = \lambda \\ \frac{z-z_p}{c} = \lambda \end{cases} \text{ que a su vez, es equivalente al sistema de ecuaciones } \begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \\ \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases}$$

El cual es equivalente a cualquiera de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \\ \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \quad (3)$$

Que por brevedad se suele escribir así

$$\frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{c} \quad (4)$$

es la forma simétrica de la ecuación de la recta en el espacio. No debe olvidarse que (4) no es una ecuación sino uno cualquiera de los tres sistemas de (3)

ECUACIONES SIMETRICAS (4)

Tiene las siguientes particularidades para recordar:

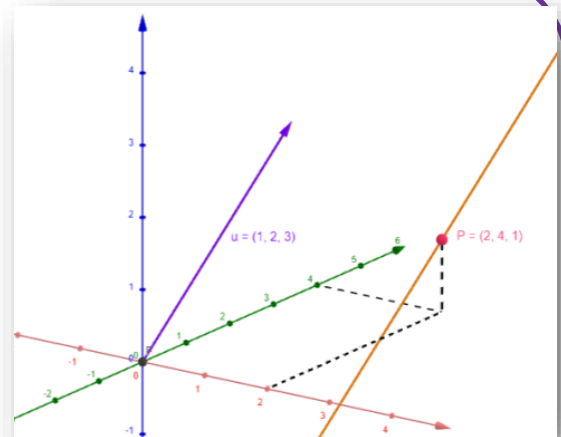
- Los denominadores son las componentes de un vector director, y recibe el nombre de números directores de la recta.
- Los sustraendos de cada numerador, son las coordenadas de un punto P que pertenece a la recta

Dada la recta $x - 2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{3}$ identifica el vector director y un punto que pertenece a la misma.

La simple lectura de la ecuación $x - 2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{3}$

nos permite deducir que un vector director de la recta correspondiente es:

$\vec{u} = (1,2,3)$ y que $P(2,4,1)$ es un punto perteneciente a la recta (propón otro vector director y otro punto perteneciente a la recta).



Utilizando el mismo ejemplo vamos a tratar de comprender que significado tienen los sistemas de ecuaciones (3), trabajando con uno de ellos tendremos:

$$\begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{x-x_p}{a} = \frac{z-z_p}{c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{y-4}{2} \\ x-2 = \frac{z-1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(x-2) = y-4 \\ 3(x-2) = z-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-4 = y-4 \\ 3x-6 = z-1 \end{cases}$$

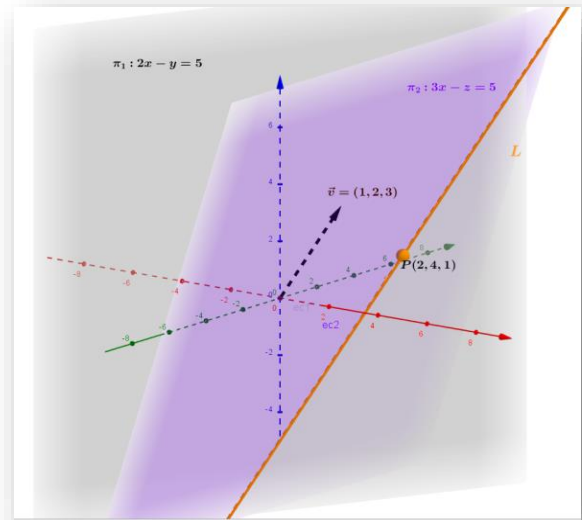
$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \rightarrow \text{ec. de un plano} \\ 3x - z = 5 \rightarrow \text{ec. de un plano} \end{cases}$$

La intersección de estos dos planos nos dará como resultado la recta, es decir que la recta puede pensarse como el conjunto solución de la intersección de los dos planos

$$L = \left\{ P(x, y, z) / \frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b} \wedge \frac{x - x_p}{a} = \frac{z - z_p}{c} \right\}$$

Que en nuestro ejemplo sería

$$L = \{P(x, y, z) / 2x - y = 0 \wedge 3x - z = 5\}$$



COSENOS DIRECTORES DE UNA RECTA

Llamemos cosenos directores de una recta a los cosenos directores de un vector director correspondiente a dicha recta.

Si $\vec{v} = (a, b, c)$ es un vector de la recta L se tiene que:

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{v}|}; \cos \beta = \frac{b}{|\vec{v}|}; \cos \gamma = \frac{c}{|\vec{v}|} \quad (5) \text{ son cosenos directores de la recta L.}$$

También serán cosenos de la recta, los cosenos directores de $-\vec{v} = (-a, -b, -c)$ y se cumple la relación: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Halla la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas, simétricas y cosenos directores de la recta que pasa por el punto $P(0, 1, -4)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (2, -3, 5)$

Solución: Aplicando (1): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1 - 3\lambda \\ -4 + 5\lambda \end{pmatrix}$

De donde se obtienen las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -4 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{despejando } \lambda \text{ se obtienen}$

las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 4}{5}$$

El módulo del vector \vec{v} será $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$. Luego aplicando (5)

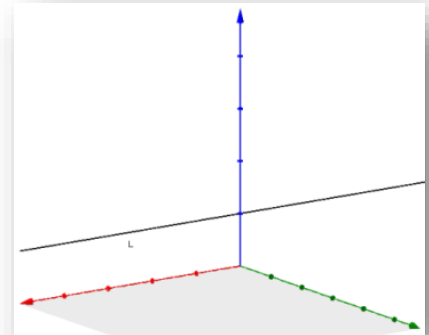
$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{38}}; \cos \beta = \frac{-3}{\sqrt{38}}; \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{38}} \text{ serán los cosenos directores}$$

POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA EN R³ -RECTAS PARALELAS A LOS EJES COORDENADOS

Si la recta es paralela a los ejes coordenados los vectores directores serán:

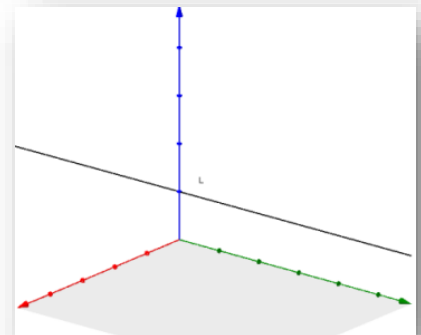
- $L // \text{eje } x \Rightarrow \vec{v} // \vec{i} \Rightarrow \vec{v} = (a, 0, 0)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(a, 0, 0)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p \\ z = z_p \end{cases}$
Ecuaciones simétricas	$\frac{x - x_p}{a}; y = y_p; z = z_p$



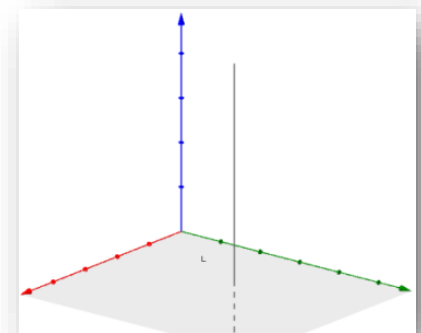
- $L // \text{eje } y \Rightarrow \vec{v} // \vec{j} \Rightarrow \vec{v} = (0, b, 0)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(0, b, 0)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = x_p \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p \end{cases}$
Ecuaciones simétricas	$\frac{y - y_p}{b}; x = x_p; z = z_p$



- $L // \text{eje } z \Rightarrow \vec{v} // \vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (0, 0, c)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(0, 0, c)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = x_p \\ y = y_p \\ z = z_p + \lambda c \end{cases}$
Ecuaciones simétricas	$x = x_p; y = y_p; \frac{z - z_p}{c}$



Encuentra la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y es paralela al eje y .

Solución: se puede utilizar el versor \vec{j} como vector director de la recta $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(0, 1, 0) \text{ Ecuación Vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 \end{cases} \text{ Ecuaciones paramétricas}$$

$$y - 2; x = 1; z = -1 \text{ ecuaciones simétricas}$$

Halla la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos $P(1, -2, 2)$ y $Q(3, -2, 2)$

Solución: la dirección viene dada por el vector entre los dos puntos P y Q

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2, 0, 0)$$

$$\text{Aplicando (1): } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

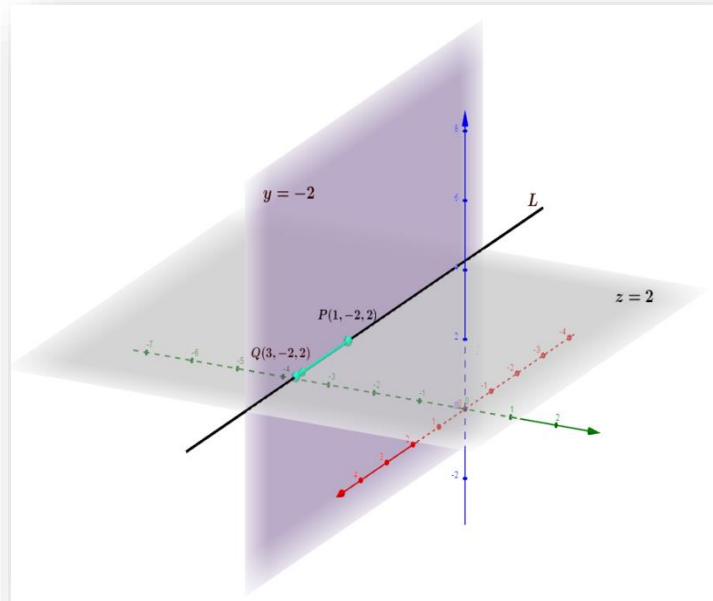
De donde se obtiene las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Ecuaciones Simétricas:

$$\frac{x-1}{2}; y = -2; z = 2$$

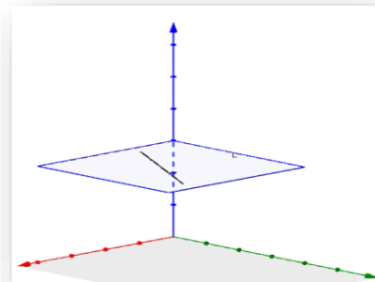
es una recta paralela al eje x y que pasa por el punto P. También se podría decir que es una recta que pasa por el punto P y resulta de la intersección de los planos $y = -2$ y $z = 2$



RECTAS PARALELAS A LOS PLANOS COORDENADOS

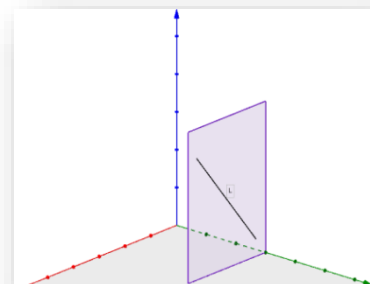
- $L // \text{plano } xy \Rightarrow \vec{v} // \text{plano } xy \Rightarrow \vec{v} = (a, b, 0)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(a, b, 0)$
Ec. paramétricas	$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p \end{cases}$
Ec. simétricas	$\frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b}; z = z_p$



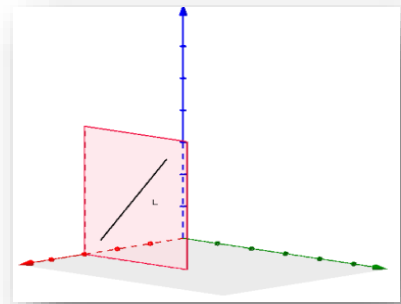
- $L // \text{plano } xz \Rightarrow \vec{v} // \text{plano } xz \Rightarrow \vec{v} = (a, 0, c)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(a, 0, c)$
Ec. paramétricas	$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p \\ z = z_p + \lambda c \end{cases}$
Ec. simétricas	$\frac{x - x_p}{a} = \frac{z - z_p}{c}; y = y_p$



- $L // \text{plano } yz \Rightarrow \vec{v} // \text{plano } yz \Rightarrow \vec{v} = (0, b, c)$

Ec. vectorial	$(x, y, z) = (x_p, y_p, z_p) + \lambda(0, b, c)$
Ec. paramétricas	$\begin{cases} x = x_p \\ y = y_p + \lambda b \\ z = z_p + \lambda c \end{cases}$
Ec. simétricas	$\frac{y - y_p}{b} = \frac{z - z_p}{c}; x = x_p$



- Encuentra la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $P(1, -2, 1)$ y es paralela al plano xy

Solución: $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ puede ser un vector director de la recta

$$(x, y, z) = (1, -2, 1) + \lambda(1, 1, 0) \text{ Ecuación Vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \text{ Ecuaciones paramétricas}$$

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{1}; z = 1 \text{ ecuaciones simétricas}$$

También es válido escribir $x - 1 = y + 2; z = 1$

- Encuentra la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa los puntos $P(3, 1, -1)$ y $Q(3, 2, 2)$

Solución: la dirección viene dada por el vector entre los dos puntos P y Q

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 3)$$

Ecuación vectorial

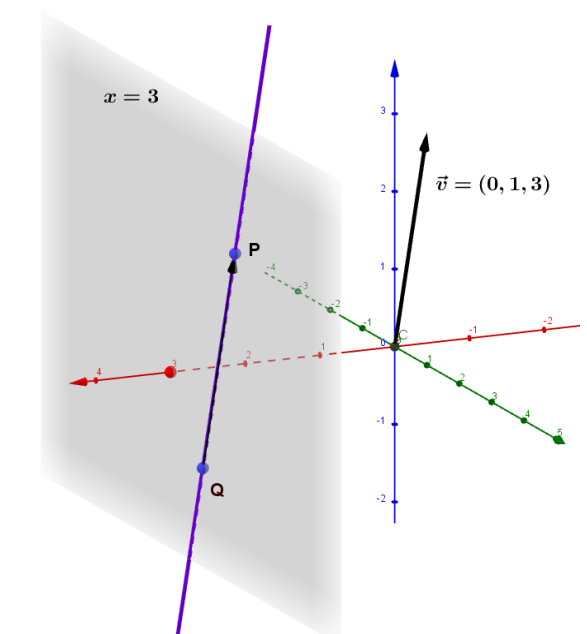
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + \lambda \\ 2 + 3\lambda \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Despejando } \lambda, \text{ se obtienen las}$$

$$\text{Ecuaciones Simétricas } \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}; x = 3$$

La recta es paralela al plano yz , también se puede decir que se encuentra en el plano $x = 3$



ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS

El ángulo entre dos rectas en \mathbb{R}^3 va a estar dado por el menor ángulo entre sus respectivos vectores directores. Para obtener el menor ángulo consideramos el valor absoluto del producto escalar

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \rightarrow \theta = \arccos \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

Halla el ángulo agudo que forman las rectas:

$$L_1: \frac{x+1}{2} = y = \frac{z+1}{1} \quad \text{y} \quad L_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Solución: $\vec{v}_1 = (2,1,1)$ y $\vec{v}_2 = (0,2,1)$

$$\cos \theta = \frac{(2,1,1) \cdot (0,2,1)}{|\sqrt{6}| \cdot |\sqrt{5}|} = \frac{3}{\sqrt{30}} \rightarrow \theta \approx 57^\circ$$

CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS

Si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dirigen a L_1 y L_2 respectivamente, puede asegurarse que:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Observación: Debe tenerse en cuenta que ser perpendiculares no significa que se corten.

- Demuestra si $L_1 \perp L_2$ siendo $L_1: x = 1; \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ y $L_2: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7}$

Solución: $\vec{v}_1 = (0,2,-1)$, $\vec{v}_2 = (3,2,7)$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow (0,2,-1) \cdot (3,2,7) = 4 - 7 = -3 \neq 0 \text{ las rectas no son perpendiculares}$$

- Halla la recta que pase por el origen y que sea perpendicular a $L_1: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-5}$
¿Cuántas hay?

Solución: $\vec{v}_1 = (-1,2,-5)$; $\vec{v}_2 = (x,y,z)$ vector director de la recta desconocida L_2

La condición que se debe cumplir es que $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

$$(-1,2,-5) \cdot (x,y,z) = 0$$

$$-x + 2y - 5z = 0 \Rightarrow x = 2y - 5z \Rightarrow \vec{v}_2 = (2y - 5z, y, z)$$

Habrán infinitas rectas, contenidas en el plano $-x + 2y - 5z = 0$

Sabiendo que pasa por $P(0,0,0)$ y con $\vec{v}_2 = (2y - 5z, y, z)$. La ecuación vectorial será

$$L_2: (x,y,z) = \lambda(2y - 5z, y, z)$$

CONDICIÓN DE PARALELISMO ENTRE RECTAS

Si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dirigen a L_1 y L_2 respectivamente y $P_1 \in L_1 \wedge P_2 \in L_2$, entonces se deben cumplir dos condiciones

$$L_1 // L_2 \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2 \\ P_1 \in L_1 \wedge P_1 \notin L_2 \end{cases}$$

Observación: Debe tenerse en cuenta que ser paralelas significa que NO se corten.

- Decide si $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{-4}$ y $L_2: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 10t \\ z = 1 - 8t \end{cases}$ siendo $t \in \mathbb{R}$ son paralelas.

Solución: comprobando la primera condición

$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2 \Rightarrow (2, 5, -4) = \lambda(4, 10, -8) \text{ Igualando componente a componente}$$

$$\begin{cases} 2 = 4\lambda \\ 5 = 10\lambda \\ -4 = -8\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{-4}{-8}$$

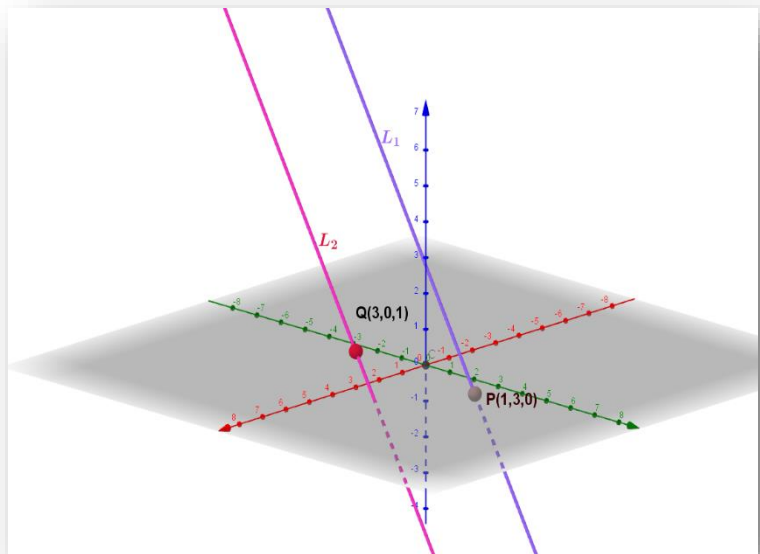
la razón es la misma, por lo tanto se cumple que $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$

Para comprobar la segunda condición, podemos reemplazar $P_1(1, 3, 0)$ en alguna de las ecuaciones de la recta de L_2

$$L_2: \frac{x_1 - 3}{4} = \frac{y_1}{10} = \frac{z_1 - 1}{-8}$$

$$\frac{1 - 3}{4} \neq \frac{3}{10} \neq \frac{0 - 1}{-8}$$

las razones no son iguales, quiere decir que $P_1 \notin L_2$, por lo tanto se cumplen las dos condiciones y las rectas son paralelas



Ejercitación Halla las ecuaciones de los ejes coordenados.

- ¿Cuáles son las condiciones que deben darse para que una recta sea paralela a uno de los ejes coordenados?
- Si una recta está contenida en uno de los planos coordenados, sin ser paralela a ningún eje. ¿qué números directores tiene? Halla una ecuación vectorial de la misma

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA EN R^2

Las ecuaciones vistas en el espacio vamos a generalizar para el plano cartesiano. La ecuación $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}$ también es válida para la recta L en el plano cartesiano.

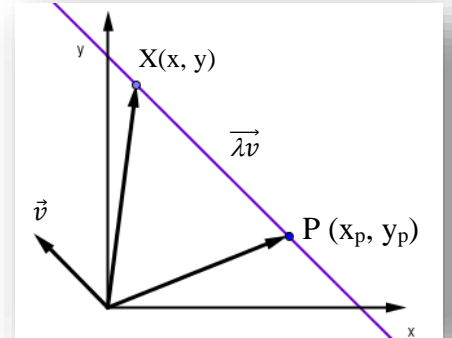
Sea $X(x, y)$ un punto genérico de la recta, $P(x_p, y_p) \in L$ y $\vec{v} = (a, b)$ el vector director, entonces $\overrightarrow{OP} = (x_p, y_p)$ y $\overrightarrow{OX} = (x, y)$, son vectores en posición estándar

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{v} \rightarrow (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) = \lambda \vec{v}$$

por lo tanto despejando \overrightarrow{OX}

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v} \quad (1)$$

reemplazando los vectores por sus coordenadas se tiene otra forma de escribir la ecuación vectorial de L



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1) \text{ ECUACION VECTORIAL PARAMETRICA}$$

Operando con el segundo miembro se reduce por igualdad de vectores:

$$\begin{cases} x = x_p + \lambda a \\ y = y_p + \lambda b \end{cases} \quad (2) \text{ ECUACIONES CARTESIANAS PARAMÉTRICAS}$$

Para cada valor que se le asigna al parámetro λ se obtiene un par ordenado (x, y) que define un punto X que está en la recta L. Eliminando el parámetro λ en (2) se igualando obtenemos las

$$\frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b} \quad (3) \text{ ECUACIONES SIMÉTRICAS}$$

Dada la recta de la ecuación explícita $y = -2x + 6$ dar las componentes de un vector director y de un vector normal. Escribir la ecuación vectorial, paramétricas y simétricas de la recta

Solución: para determinar un vector director, basta conocer dos puntos de la recta:

$$\text{Si } x = 0 \text{ } y = 6 \rightarrow P(0, 6) \quad \overrightarrow{QP} = \vec{v} = (-3, 6)$$

$$\text{Si } y = 0; x = 3 \rightarrow Q(3, 0)$$

Aplicando las ecuaciones (1), (2) y (3)

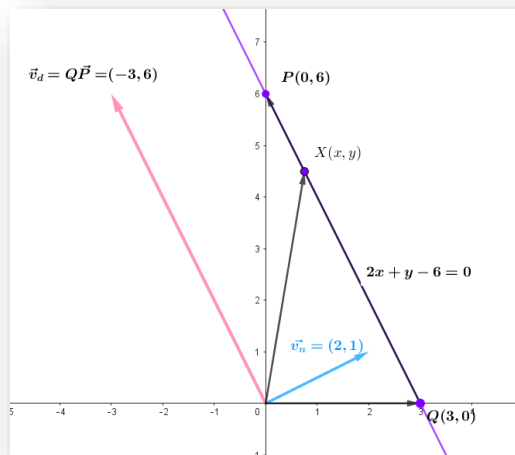
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ ec. vectorial}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 6 + 6\lambda \end{cases} \text{ ec. paramétricas}$$

$$\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{6} \text{ ec. simétricas}$$

λ	x	y
1	-3	12
2	-6	18
-1	3	0

Haciendo una tabla de valores se pueden obtener distintos puntos de la recta al variar λ



Escribiendo la ec. de la recta en forma general, es muy fácil identificar el vector normal, ya que son los coeficientes que multiplican a las variables x e y .

Para encontrar el vector director de la recta hay que realizar el producto escalar e igualarlo a cero ya que ambos vectores son perpendiculares.

Nota: ¿Cuál es la diferencia de estas ecuaciones con las de la recta en R^3 ?

De la ecuación $\frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b}$ eliminando los denominadores tendremos

$b(x - x_p) = a(y - y_p)$ aplicando propiedad distributiva, igualando a cero y agrupando

$bx - ay + (ay_p - bx_p) = 0$ donde si hacemos $A = b$; $B = -a$ y $C = ay_p - bx_p$ obtenemos la ecuación de primer grado en dos variables que es la **ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA**
 $Ax + By + C = 0$ (4)

Observación: Los coeficientes de las variables (A y B) no deben ser simultáneamente 0. Dichos coeficientes corresponden a un vector normal.

Ecuación De Los Ejes Cartesianos

Si una recta coincide con el eje x (es el eje x) entonces A y C deben ser cero ¿Por qué?

La ecuación se reduce a $By = 0 \Rightarrow y = 0$. Entonces la ecuación del eje x es $y = 0$.

Análogamente se deduce que la ecuación de correspondiente al eje y es $x = 0$

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

¿Puedes.....

- ☐ hallar la ecuación de la recta con dos puntos?
- ☐ identificar en las distintas ecuaciones el vector director de la recta y un punto de paso?
- ☐ hallar las ecuaciones de una recta, conocidos sus números directores y un punto por el cual pasa?
- ☐ diferenciar entre la ecuación de una recta y la ecuación de un plano?
- ☐ obtener una recta perpendicular a un plano coordenado? ¿Qué números directores tendrá?
- ☐ obtener una recta paralela a uno de los planos coordenados? ¿Qué números directores tendrá?
- ☐ decir cuando dos rectas son perpendiculares o paralelas?

TRABAJO PRÁCTICO: LA RECTA

- Halla las ecuaciones: vectorial, paramétricas y simétricas de la recta L de \mathbb{R}^3 determinada por:
 - pasa por el $P(2,3,4)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (2,1,1)$
 - pasa por $P(3,4,-1)$ y $Q(2,4,3)$ Qué posición tiene respecto de los planos coordenados?
 - Paralela a cada uno de los ejes coordenados, que pasa por $(1,2,3)$
 - Contiene al punto $(2,1,-3)$ y es perpendicular al plano $4x - 3y + z = 5$
 - Pasa por $(1,1,2)$ y es paralela a la recta que pasa por $(1,3,5)$ y $(2,1,0)$
 - Pasa por $(1,0,1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $L : (1,2,3) + \lambda (-1,1,2)$.
 - Si una recta está contenida en uno de los planos coordenados, sin ser paralela a ningún eje. ¿Qué números directores tiene?
 - Pasa por el punto $(1,3,5)$ con ángulos $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 60^\circ$
- Encuentra la ecuación vectorial y paramétrica de la recta paralela al vector $v = (1,3,1)$ y que pasa por el punto $A(3,4,2)$. Encuentre otros dos puntos de la recta
- Encuentra las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $A(1,2,3)$ y $B(2,-1,4)$
 - Muestre que $(-1,8,1)$ y $(4,-7,6)$ son puntos de la recta.
- Encuentra las ecuaciones en forma paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $P(6,1,2)$ y es paralela a la recta $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$
- Dadas las rectas escribe (cuando sea posible) otras dos e identifica su posición:
 - $\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{2}$
 - $\begin{cases} x = 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$
 - $S = \{x, y, 2x + y\}$
 - $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda (-1, 0, 2)$
 - $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda (0, 2, 1)$
 - $\frac{x+5}{2}; y = 1; z = 2$
 - $(x, y, z) = \lambda(-1, 0, 2) + \alpha(0, 0, 1)$
 - $S = \{x, x, 2x\}$
- Una recta contiene al Punto $(-3,1,1)$ y es paralela al vector $u = (1, -2, 3)$. Determina cuáles de los siguientes puntos están en dicha recta:
 - $(0,0,0)$
 - $(1,2,3)$
 - $(-2, -1, 4)$
 - $(5,2, -1)$
 - $(-4,3, -2)$

b) Halla el ángulo formado por la recta que pasa por los puntos $(-2,5, -2)$ y $(0,1,3)$ y la recta que pasa por los puntos $(1, -1, -3)$ y $(1, -2, -1)$
- Determina si las siguientes rectas son paralelas

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{10} \quad ; \quad \begin{cases} x = t \\ y = -5 - 2t \\ z = -5t \end{cases}$$

8. Determina si las rectas dadas son perpendiculares.

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2} \quad ; \quad \frac{x-3}{2} = \frac{2y-10}{-8} = \frac{-3+z}{7}$$

9. Sea L la recta de ecuación :

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{2}$$

Determina la ecuación del plano π que contiene a L y al punto $P(-3,2,3)$

10. Dada la recta L que pasa por $(1,2,3)$ y es paralela al vector $(1,1,1)$ y dado un punto $P(2,3,5)$ que no está en L. Halla la ecuación del plano que pasa por P y que contiene todos los puntos de L.

11. Halla el ángulo que forman las rectas $L_1: x=1; \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ y L_2 que pasa por $(-2,5,-2)$ y $(0,1,3)$.

12. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(3,-3,4)$ y es perpendicular a cada una de las rectas dadas:

$$\frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5} \quad ; \quad \frac{x-3}{1} = \frac{2y-7}{2} = \frac{3-z}{-3}$$

13. Sean $P_1(0,0,0)$; $P_2(15,13,0)$; $P_3(17,15,0)$ y $P_4(16,14,18)$

a) Determina la ecuación del plano π que pasa por P_1, P_2 y P_3

b) Determina la recta L tal que $L \perp \pi$ y $P_4 \in L$

Ecuación Vectorial De La Recta En \mathbb{R}^2

1. Halla la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa:

a) por el punto $A(1, -2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos R y S, siendo $R(-2, 0)$ y $S(0, -1)$.

b) Pasa por los puntos $P(7,4)$ y $Q(-1, -2)$

2. Dada la ecuación general de la recta $4x + 3y - 12 = 0$ escríbela en forma vectorial, paramétrica y simétrica. Determina un vector director y un vector normal.

3. Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y es paralela al vector $(1,1)$

4. Indica un punto que pertenezca a la recta, un vector director y escribe al menos de dos formas distintas, grafica

a. $x - 3 = y + 2$

b. $\frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1}$

c. $S = \{(x, 2x+3)\}$

d. $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

e. $x = 4; \frac{y}{-1}$

f. $\frac{x}{2}; y = 2$

g. $2x + 2y = 4$

POSICIÓN Y MAGNITUD

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Sea la recta $L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$ y $\pi: ax + by + cz + d = 0$ siendo

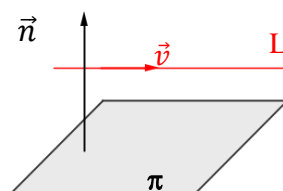
$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ el vector director y punto de la recta respectivamente y

$\vec{n} = (a, b, c)$ el vector normal del plano, se deberá cumplir lo siguiente para que la recta sea:

Paralela a un plano

Se verifica que si

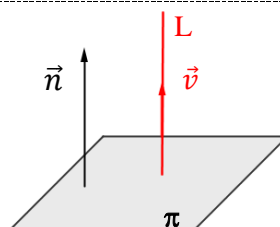
1. $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
2. $P_0 \in L \wedge P_0 \notin \pi$



Perpendicular a un plano

Se verifica que si

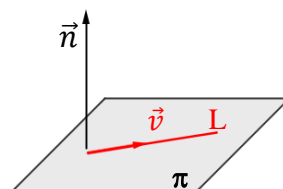
1. $L \perp \pi \Rightarrow \vec{v} // \vec{n}$
2. $\frac{v_x}{a} = \frac{v_y}{b} = \frac{v_z}{c}$



Contenida en el plano

Se verifica que si

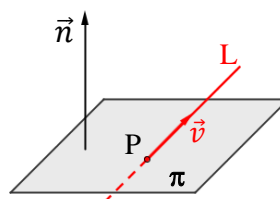
1. $L \subset \pi \Rightarrow L \cap \pi = L$
2. $L \subset \pi \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$
3. $P_0 \in L \wedge P_0 \in \pi$



Incidente a un plano

Se verifica que

1. $L \cap \pi \Rightarrow P \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$
2. $P_0 \in L \wedge P_0 \notin \pi$



Y1 Determina la posición relativa entre la recta y el plano.

a. $\pi_1: x + 2y + z + 6 = 0$ $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}$

b. $\pi_2: 2x + 3y + z + 4 = 0$ $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{7}$

c. $\pi_3: x - 2y + z + 1 = 0$ $L_3: x = y - 1 = \frac{z-1}{1}$

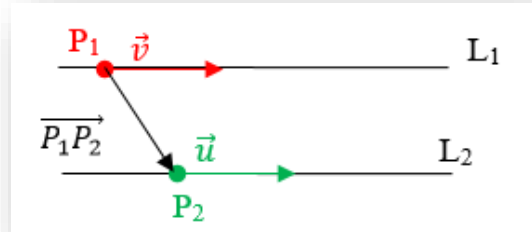
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS

Sean las rectas $L_1: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$ y $L_2: (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2) + \lambda(u_x, u_y, u_z)$ podrán ser :

Rectas Paralelas

$$L_1 // L_2 \text{ entonces } \vec{v} // \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} \neq \lambda \vec{u} \end{cases}$$

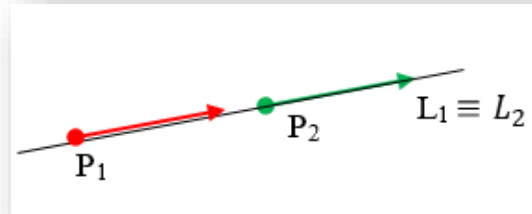
Son coplanares



Rectas Coincidentes

$$L_1 // L_2 \text{ entonces } \vec{v} // \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} = \lambda \vec{u} \end{cases}$$

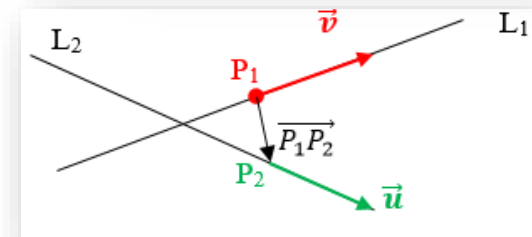
Son coplanares



Rectas Incidentes

$$L_1 \cap L_2 = P \text{ entonces } \begin{cases} \vec{v} \neq \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0 \end{cases}$$

Son coplanares



Rectas Alabeadas L_1 y L_2 son alabeadas si se cumple $\begin{cases} \vec{v} \neq \lambda \vec{u} \\ \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) \neq 0 \end{cases}$

No son coplanares

CONCLUSIÓN: las rectas pueden ser coplanares o no coplanares

Rectas coplanares si $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$ entonces pueden ser $\begin{cases} \text{paralelas} \\ \text{coincidentes} \\ \text{incidentes} \end{cases}$

Rectas no coplanares si $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) \neq 0$ son Alabeadas – ninguna de las anteriores

¶2. Determina si los siguientes pares de rectas se intersectan, son paralelas, coincidentes, o alabeadas:

$$\text{a. } L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4} \quad L_2: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{b. } L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3}; z = 4 \quad L_2: \frac{x+2}{2}; y = 1; z = 4$$

INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO

Para determinar la intersección entre una recta $L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$ y un plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, se resuelve un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x & (1) \\ y = y_0 + \lambda v_y & (2) \\ z = z_0 + \lambda v_z & (3) \\ ax + by + cz + d = 0 & (4) \end{cases}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en (4) se reduce a una ecuación lineal con una variable λ :

$$a(x_0 + \lambda v_x) + b(y_0 + \lambda v_y) + c(z_0 + \lambda v_z) + d = 0$$

Se pueden presentar tres situaciones.

- a) **Caso I:** Solución única, desde el punto de vista geométrico la recta corta al plano en un punto

$$L \cap \pi \Rightarrow P \quad S = \{(x, y, z)\}$$

- b) **Caso II:** Infinitas soluciones, desde el punto de vista geométrico la recta está incluida en el plano

$$L \subset \pi \Rightarrow L \cap \pi = L$$

$$S = \{(x_0 + \lambda v_x, y_0 + \lambda v_y, z_0 + \lambda v_z)\}$$

- c) **Caso III:** Ninguna solución, la recta es externa y paralela al plano $\pi \Rightarrow S = \{\emptyset\}$

Estudia las diferentes situaciones:

Caso I : Sea $L: (x, y, z) = (-2, 0, 4) + \lambda(3, -1, 2)$ y el plano $\pi: 2x + 3y - z + 11 = 0$

Solución: pasando la ecuación de la recta a la forma paramétrica, nos queda junto a la ecuación del plano el siguiente sistema

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda & (1) \\ y = -\lambda & (2) \\ z = 4 + 2\lambda & (3) \\ 2x + 3y - z + 11 = 0 & (4) \end{cases}$$

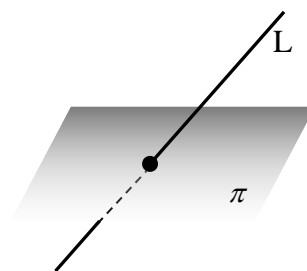
Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en (4)

$$2(-2 + 3\lambda) + 3(-\lambda) - (4 + 2\lambda) + 11 = 0$$

Aplicando propiedad distributiva y despejando $\lambda = -3$ y sustituyendo en (1), (2), (3)

$$\begin{cases} x = -11 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

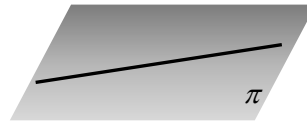
Por lo tanto, $L \cap \pi = P(-11, 3, -2)$ Solución Única



Caso II: Sea $L: (x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, -1, -3)$ y $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$

Solución: ídem caso I

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda & (1) \\ y = 1 - \lambda & (2) \\ z = 2 - 3\lambda & (3) \\ x - 2y + z - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$



Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en 4

$$1 + \lambda - 2(1 - \lambda) + 2 - 3\lambda - 1 = 0$$

Aplicando propiedad distributiva y despejando $0\lambda = 0$

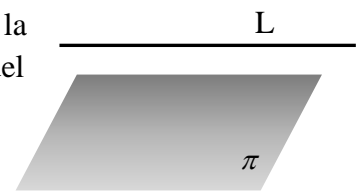
Geoméricamente significa que todo punto de la recta pertenece al plano (o sea la recta está incluida en el plano), para cualquier valor de λ se mantiene la identidad, haz la prueba para diferentes valores de λ

El conjunto Solución será la misma recta $S = \{(1 + \lambda, 1 - \lambda, 2 - 3\lambda)\}$

Caso III: Sea $L: (x, y, z) = (-2, 3, 4) + \lambda(5, 2, 3)$ y el plano $\pi: x - y - z + 2 = 0$

Solución: se efectúa el pasaje de la ecuación vectorial de la recta a las formas paramétricas y junto con la ecuación del plano se arma el sistema:

$$\begin{cases} x = -2 + 5\lambda & (1) \\ y = 3 + 2\lambda & (2) \\ z = 4 + 3\lambda & (3) \\ x - y - z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$



Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) en 4

$$-2 + 5\lambda - (3 + 2\lambda) - (4 + 3\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 0\lambda = 7 \text{ Absurdo!!!!}$$

Esto quiere decir que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla la igualdad, y geoméricamente significa que no existe intersección entre la recta y el plano, la recta es externa y paralela al plano y el conjunto solución será $S = \{\emptyset\}$

Y3. Halla el conjunto solución entre el plano y la recta hallados en el Y1.

a. $\pi_1: x + 2y + z + 6 = 0$

$$L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}$$

b. $\pi_2: 2x - 3y - z + 4 = 0$

$$L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{7}$$

c. $\pi_3: x - 2y + z - 1 = 0$

$$L_3: x = y - 1 = \frac{z-1}{-1}$$

Y4. Dado el plano $\pi: 5x - 3y - z - 6 = 0$,

Demuestra que dicho plano contiene a la recta $L: (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(2, 3, 1)$ y escribe el conjunto solución.

INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

Dos rectas en el espacio *si no son paralelas ni coincidentes* se cortan en un punto o son alabeadas. Para saber cuál es el caso podemos realizar el producto doble mixto, si es igual a cero las rectas son coplanares y si no son paralelas ni coincidentes entonces se cortan en un punto.

Para obtener el punto de intersección se igualan las componentes de ambas rectas

$$L_1: (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_x, v_y, v_z) = (x_2, y_2, z_2) + t(u_x, u_y, u_z)$$

$$L_2: \begin{cases} x_1 + \lambda v_x = x_2 + t u_x \\ y_1 + \lambda v_y = y_2 + t u_y \\ z_1 + \lambda v_z = z_2 + t u_z \end{cases}$$

Las incógnitas son los parámetros λ y t de L_1 y L_2 , que dan el punto común de ambas rectas

Observación: en este caso, el sistema formado es compatible. Si no existen valores de λ y t que hagan posible la igualdad, el sistema es incompatible y las rectas no tienen puntos comunes: son alabeadas

- Dadas L_1 y L_2 decidir si las rectas se cortan en un punto o son alabeadas

$$L_1: x - 2 = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Solución:

Paso 1: Pasando L_1 a la forma paramétrica $L_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

Paso 2: Igualando ambas ecuaciones $\begin{cases} 2 + \lambda = t & (1) \\ 1 + 4\lambda = 3 + 2t & (2) \\ 3\lambda = 1 - t \end{cases}$

Sustituyendo (1) en (2) nos queda

$$\begin{cases} 2 + \lambda = t \\ 1 + 4\lambda = 3 + 2(2 + \lambda) \rightarrow \lambda = 3 \\ 3\lambda = 1 - t \end{cases}$$

Sustituyendo $\lambda = 3$ en la 3ra ecuación encontramos el valor de $t = -8$

Con los valores de λ y de t vamos al Paso 2, sustituimos los valores hallados, como la igualdad no se cumple las rectas son alabeadas

RECTA COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

Dos planos no paralelos, determinan una única recta. ¿Cómo hallar una ecuación vectorial de la misma?

Dados los planos π_1 y π_2 con vectores normales \vec{n}_1 y \vec{n}_2 respectivamente, no paralelos.

La recta L , por ellos determinada, estará dirigida por un vector \vec{u} , ortogonal a \vec{n}_1 y \vec{n}_2 , debido a que $L \in \pi_1$ y $L \in \pi_2$ simultáneamente.

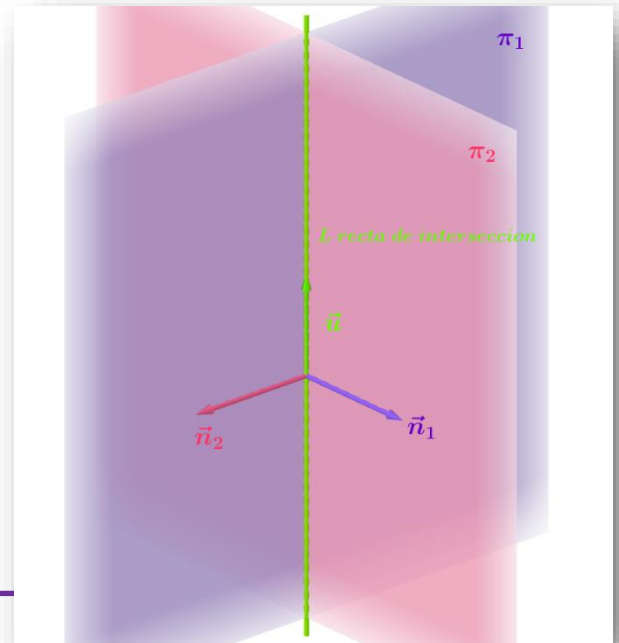
Por consiguiente, debe cumplirse: $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}_1 \wedge \vec{u} \perp \vec{n}_2$

Como $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ cumple con este requisito, bastará tomar entonces $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ o cualquier múltiplo escalar. Como punto fijo P_0 puede tomarse cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan simultáneamente las ecuaciones de los dos planos.

Si $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y

$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Por lo tanto el sistema formado por ambas ecuaciones determina una recta:

$$L: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$



Encontrar las ecuaciones simétricas de la recta que es intersección de los planos $\pi_1: x - y + z = 1$ y $\pi_2: x + 2y - 3z - 2 = 0$

Solución: necesitamos un punto perteneciente a la recta y un vector director. Para obtener un punto damos a una variable un valor cualquiera, por ejemplo hacemos $z = 0$. Entonces con la ecuación de los planos obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3}; y = -\frac{1}{3}$$

Es decir, el punto $P\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ pertenece a la recta pues sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones de π_1 y π_2 .

Para obtener un vector director, podemos tener en cuenta que conocemos dos vectores normales a los planos π_1 y π_2 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 2, -3)$ respectivamente, como $\vec{n}_1 \perp \pi_1$ y $\vec{n}_2 \perp \pi_2$, entonces el producto vectorial $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ por ser igual a un vector simultáneamente perpendicular a \vec{n}_1 y \vec{n}_2 deberá ser paralelo a la recta intersección buscada y por lo tanto funciona como vector director.

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

A partir de aquí la ecuación se obtiene como en casos anteriores. Si lo hacemos, llegaremos a este resultado:

$$L: \begin{cases} x = \lambda + \frac{4}{3} \\ y = 4\lambda + \frac{1}{3} \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

DISTANCIA DE UN PLANO AL ORIGEN DE COORDENADAS

Dada la ecuación del plano $\pi: ax + by + cz = d$ la distancia del plano al origen de coordenadas, será la proyección de un punto del plano sobre el vector normal

$$\text{dist}(\pi, O) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OY} = \frac{\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot (a, b, c)$$

$$\text{dist}(\pi, O) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OY} = \frac{a \cdot 0 + b \cdot \frac{d}{b} + c \cdot 0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

Justificación: por eso en la ecuación normal del plano el término independiente determinaba la distancia del plano al origen de coordenadas

$$\frac{ax}{|\vec{n}|} + \frac{by}{|\vec{n}|} + \frac{cz}{|\vec{n}|} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

- Halla la distancia del plano $\pi: 2x + 3y + 6z = 8$ al origen de coordenadas

Solución:

$$\text{dist}(\pi, O) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{OY} = \frac{\left(0, \frac{8}{3}, 0\right)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} \cdot (2, 3, 6) = \frac{0 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{8}{3} + 0 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{8}{7}$$

O aplicando directamente

$$\text{dist}(\pi, O) = \frac{d}{|\vec{n}|} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{8}{7}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

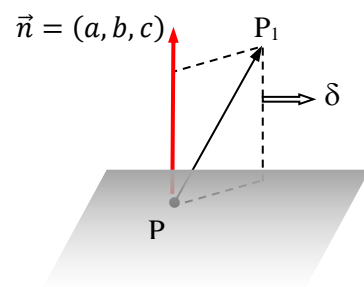
Sean $P_1(x_1, y_1, z_1) \notin \pi$; $P(x, y, z) \in \pi: ax + by + cz = d$

La distancia del punto P_1 al plano π será la longitud δ del segmento determinado por P_1 y el pie de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

Evidentemente si $P_1 \in \pi \Rightarrow \delta = 0$

Se puede calcular de varias maneras, una de ellas es la siguiente:

- determinar un punto P del plano
- amar un vector entre estos dos puntos $\overrightarrow{PP_1}$
- proyectar $\overrightarrow{PP_1}$ sobre el vector normal, que será la distancia (δ) buscada



$$\delta = |\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \left| \frac{\overrightarrow{PP_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \cdot (a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\delta = |\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax + by + cz)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\delta = |\text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \quad (2)$$

- Calcula la distancia del punto $P_1(1,2,3)$ al plano $\pi : 4x + 4y + 2z = 6$

Solución:

1. En la ecuación del plano se determina un punto, haciendo $x = y = 0$; $z = 3 \rightarrow P(0,0,3)$ con este punto y el punto P_1 se arma un vector
2. $\overrightarrow{PP_1} = (1,2,3) - (0,0,3) = (1,2,0)$
- 3.

$$Proy_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1} = \frac{(1,2,0) \cdot (4,4,2)}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}}$$

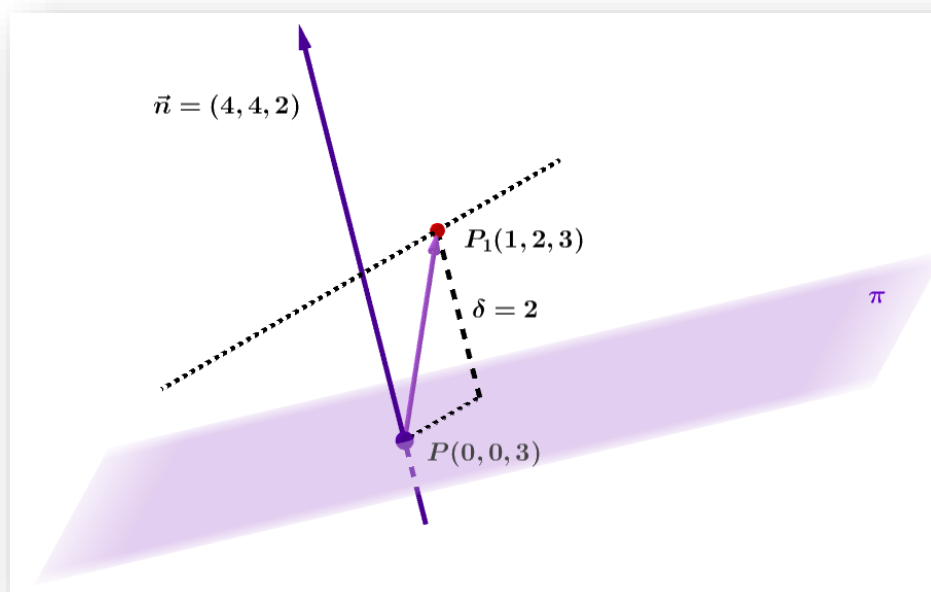
$$Proy_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

- Otra opción:

Utilizando la ecuación (2) si $\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 2 \\ d = 6 \end{cases}$ y reemplazando las coordenadas del punto P_1

tendremos

$$d = |Proy_{\vec{n}} \overrightarrow{PP_1}| = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$



- Otra posibilidad es:

1. Trazar una recta $L \perp \pi$ (... para trazar una recta se necesita un punto de paso de la recta y un vector director), el punto de paso es dato (P_1) y el vector director es equivalente al vector normal del plano ($\vec{v} \equiv \vec{n}$)
2. Luego hacer $L \cap \pi \Rightarrow P$
3. El módulo $|PP_1|$ será la distancia

Solución:

1. Se determina la recta con P_1 y $\vec{n} \equiv \vec{v} = (4, 4, 2)$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \quad (*) \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

2. Se realiza la intersección entre la recta y el plano, para ello se sustituye (*) en la ecuación del plano $4x + 4y + 2z = 6$

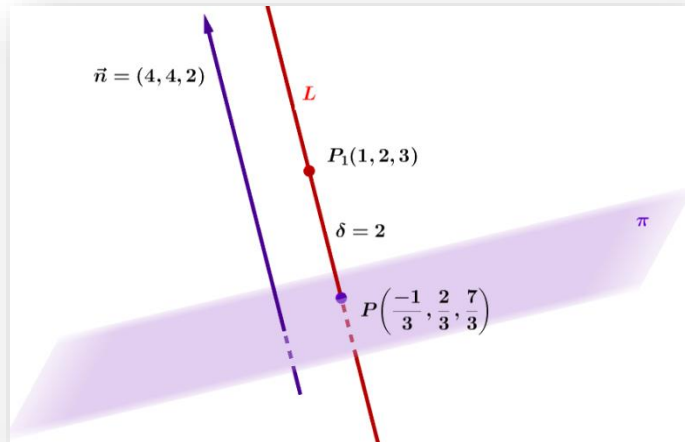
$$4(1+4\lambda) + 4(2+4\lambda) + 2(3+2\lambda) = 6$$

se aplica propiedad distributiva y se despeja λ

$\lambda = -1/3$ se reemplaza (*) se obtiene

$$P = L \cap \pi \rightarrow P(-1/3; 2/3; 7/3)$$

3. $|PP_1| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{3}\right)^2} = 2$

**DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS**

Con el resultado del punto anterior queda resuelto el problema de hallar la distancia entre dos planos paralelos. Bastará calcular la distancia de un punto perteneciente a uno de ellos, al otro plano

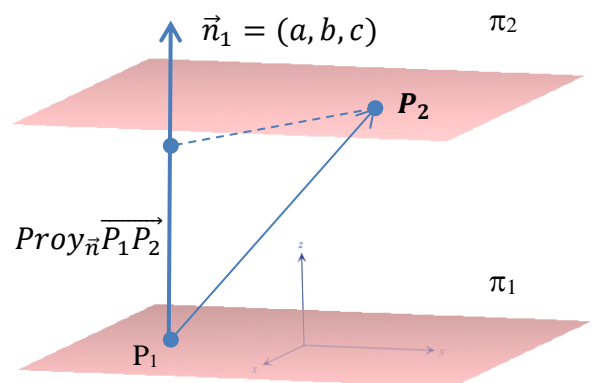
Dos planos son paralelos cuando tienen una normal común o una de ellas es múltiplo de la otra.

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Para calcular la distancia se puede proceder a:

1. Determinar un punto de cada plano
2. Armar un vector entre estos dos puntos $\overrightarrow{PP_1}$
3. Proyectar $\overrightarrow{PP_1}$ sobre un vector normal

$$d = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_2} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$



• Otra forma es calcular la distancia de los planos al origen de coordenadas. Sabiendo que en la ecuación normal del plano el término independiente es la distancia del plano al origen, la distancia entre ambos planos será:

$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \left| \frac{d_1 - d_2}{|\vec{n}|} \right| \quad (3)$$

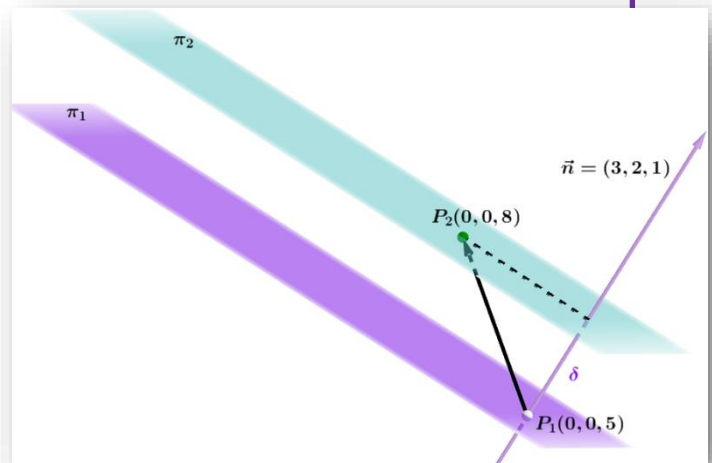
- Calcula la distancia entre
 $\pi_1 : 3x + 2y + z = 5$ y
 $\pi_2 : 3x + 2y + z = 8$

Solución:

a) $P_1(0,0,5) ; P_2(0,0,8)$

b) $\overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,3)$

$$d = \text{Proy}_{\vec{n}_1} \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{(0,0,3) \cdot (3,2,1)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$



- Otra forma de determinar la distancia entre planos paralelos es :

1. Trazar una recta perpendicular a ambos planos utilizando uno cualquiera de los puntos del plano
 $L: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (a, b, c)$
2. Hacer $L \cap \pi_2 \Rightarrow P$
3. $d(\pi_1, \pi_2) = |P_1P| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$

- Con los mismos datos del ejercicio anterior:

Solución: si $\pi_1 : 3x + 2y + z = 5$ $\pi_2 : 3x + 2y + z = 8$

1. $L \perp \pi_1 \rightarrow \vec{v} // \vec{n}_1 \rightarrow \vec{v} = \lambda \vec{n}_1$ construyes la recta

$$L : (0,0,5) + \lambda (3,2,1) \text{ pasando L a la forma paramétrica } L: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \quad (*)$$

2. $L \cap \pi_2 \rightarrow$ es sustituir las coordenadas de L en la ecuación del plano π_2

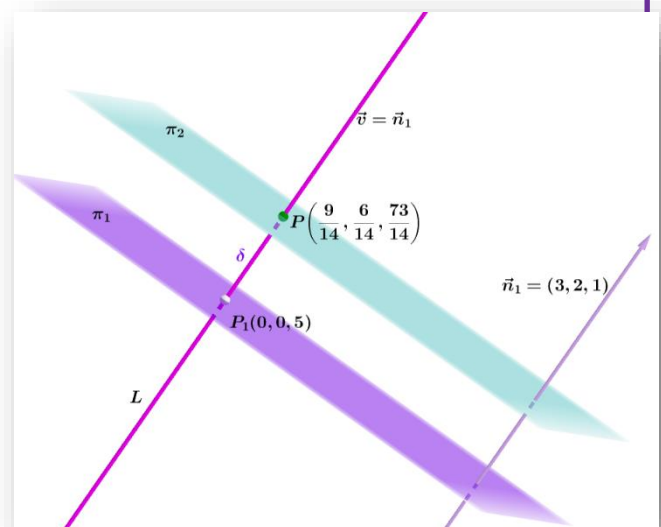
$$3x + 2y + z = 8 \rightarrow 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + (5 + \lambda) = 8 \rightarrow \lambda = 3/14$$

Sustituyendo λ en *

$$P(9/14, 6/14, 73/14)$$

$$3. |P_1P| = \sqrt{\left(\frac{9}{14}\right)^2 + \left(\frac{6}{14}\right)^2 + \left(\frac{73}{14} - 5\right)^2}$$

$$\delta = |P_1P| = \frac{3}{\sqrt{14}}$$



DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea $L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$, $P_0 \in L$; $P_1 \notin L$

Para calcular la distancia de P_1 a L se procede a:

1. Determinar $|\overrightarrow{P_0P_1}| = c$
2. Proyectar $\overrightarrow{P_0P_1}$ sobre vector director de la recta

$$a = |\text{Proy}_{\vec{v}} \overrightarrow{P_0P_1}| = \left| \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \right|$$

$$3. \text{dist}(P_1L) = \overline{P_1P} = b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

- Otra forma sería sabiendo que:

$$\text{sen} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_0P_1}}$$

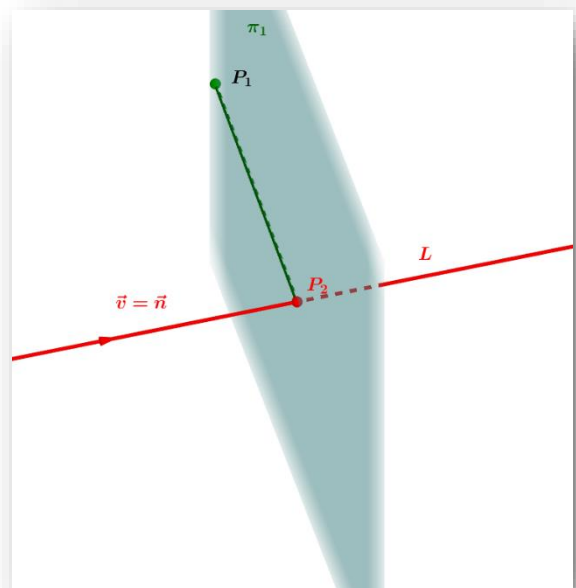
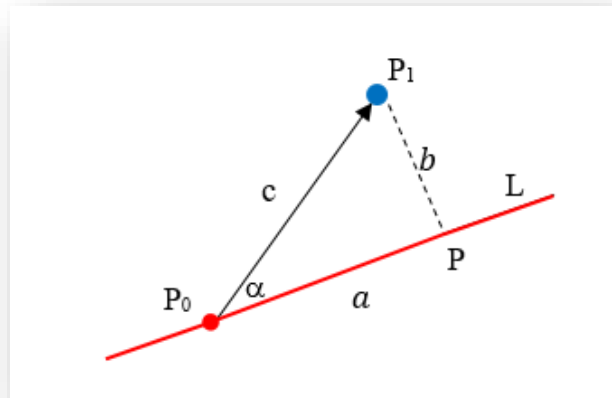
El triángulo P_1PP_0 es recto en el vértice P , luego se verifica que $d(P_1, L) = \overline{P_1P} = |\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot \text{sen} \alpha$ multiplicando y dividiendo por $|\vec{v}|$ tenemos:

$$d(P_1, L) = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen} \alpha}{|\vec{v}|} = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

- O bien se podría

1. Trazar un plano $\pi_1 \perp L$ y que contenga a P_1
2. Hacer $\pi_1 \cap L \Rightarrow P_2$
3. Calcular

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son múltiplos, o el coseno del ángulo que forman vale 1 ó -1, o el producto vectorial de sus vectores directores es nulo y ningún punto de una recta pertenece a la otra

Para calcular la distancia se procede a:

1. Determinar un plano perpendicular a las rectas por ejemplo: $\pi_1: \overrightarrow{P_1X} \cdot \vec{n} = 0$
2. $L_2 \cap \pi_1 = P_2$
3. Calcular $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

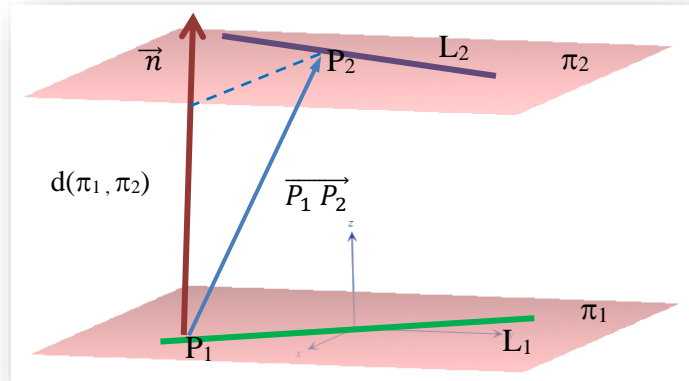
DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

Dadas las rectas L_1 y L_2 cuyos vectores directores son \vec{u} y \vec{v} (no paralelos) es posible hallar un único par de planos paralelos π_1 y π_2 que contengan a ambas rectas, para ello se procede a:

1. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. $P_1 \in L_1 ; P_2 \in L_2 \wedge \vec{n} \perp \pi_1, \pi_2$
3. $d(L_1, L_2) = d(\pi_1, \pi_2)$

• Otra opción es

1. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
2. $d(L_1, L_2) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_2} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$



- Realiza un análisis detallado de la posición entre ambas rectas y luego calcula la distancia

$$L_1: x - 2 = \frac{y-7}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: x - 1 = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{5}$$

Solución:

$$\vec{u} = (1, 4, -1); P_1(2, 7, 2) \text{ y } \vec{v} = (1, -3, 5); P_2(1, 0, 4)$$

$$\text{Análisis de paralelismo: } \vec{u} = \lambda \vec{v} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{4}{-3} \neq \frac{-1}{5} \Rightarrow \text{no son paralelas}$$

$$\text{Análisis de coplanaridad } \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = 0 \quad \overrightarrow{P_1 P_2} = (-1, -7, 2)$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1(20 - 3) + 7(5 + 1) + 2(-3 - 4) \neq 0$$

No son coplanares

Conclusión si las rectas no son paralelas y no son coplanares entonces son alabeadas

Cálculo de distancia

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 17\hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k} = (17, -6, -7)$$

$$d(L_1, L_2) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1 P_2} = \frac{(-1, -7, 2) \cdot (17, -6, -7)}{\sqrt{17^2 + 6^2 + 7^2}} = \dots$$

TRABAJO PRÁCTICO - POSICIÓN Y MAGNITUD

- Dadas las rectas: $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = z-1$ $L_2: x = \frac{y}{6} = z-3$. Determina:
 - la posición de una respecto de la otra (paralelas, coincidentes, concurrentes, alabeadas)
 - el conjunto solución
 - calcula la distancia entre ellas de ser posible.
- Dadas las rectas L_1 que pasa por el punto $Q(-1, -3, 0)$ y es paralela al vector $(2, 2/3, -1)$ y la recta L_2 perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 0, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 3, 1)$. Determina:
 - la posición de una respecto de la otra (paralelas, alabeadas, coincidentes)
 - calcula el punto de intersección
 - si fueran paralelas o alabeadas la distancia entre ellas
- Sea la recta $L: \begin{cases} y - z = -3 \\ x = -2 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 3y - 5 = 0$
 - determina la posición relativa entre la recta y el plano y encuentra el conjunto solución
 - halla un plano perpendicular a π que contenga a L
 - calcula la distancia del punto $A(1, 2, 3)$ sobre el plano hallado.
- Calcula la posición relativa entre las rectas y el conjunto solución. Determina la distancia
 - $r_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}; \quad r_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$
 - $r_1: \frac{x-1}{-1} = y-1 = \frac{z-3}{-2}; \quad r_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$
 - $r_1: \frac{x-1}{-1} = y-1 = \frac{z-3}{1}; \quad r_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$
- Sea $L_1: \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ y $L_2: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, b, c)$ se pide:
 - los números reales b y c para que las rectas sean paralelas.
 - para los valores hallados, encuentra la ecuación general del plano que las contiene a ambas
 - para $b = -1$ y $c = 0$, encuentre la distancia entre L_1 y L_2 .
- Sea L la recta de intersección de los planos $\pi_1: 2x + y - z + 30 = 0$ y $\pi_2: x - y + 2z = -1$. Encuentra el ángulo que forma L con el plano $\pi_3: x + y + z = 0$
- Demuestra que:
 - $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{7}$ no está contenida en el plano $2x - 4y + 2z = 8$

b. calcula la distancia entre la recta y el plano.

8. Sea L_1 la recta que pasa por $A(-3,2,1)$ y $B(4,0,0)$ y sea L_2 la recta que pasa por $C(1, -1,2)$ y tiene dirección $\vec{v} = (3,4, -2)$. Determina:

- la posición relativa entre las rectas
- la distancia entre ellas si las rectas fueran paralelas o alabeadas

9. Sea L una recta que pasa por $(1, 1,1)$ y es paralela $\vec{a} = (2, -1,3)$ y π el plano que pasa por $P(1,1, -2)$ y es generado por los vectores $(2,1,3)$ y $(0,1,1)$. Determina la posición relativa entre la recta y el plano.

10. Determina una ecuación del plano que es paralelo a la recta $L_1 \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t, \\ z = t \end{cases}$

y contiene a $L_2: 2(x + 2) = y = 2(z - 1)$

11. El punto $(1,2,3)$ pertenece a la recta L , la que además es paralela a la recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 4$; $2x + 3y + 4z = 5$. Halla la ecuación de L

12. Sean $\begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x + tz + h = 0 \end{cases}$ y $\pi: x + y + z + 1 = 0$. Determina los valores de t y h para los cuales la recta está incluida en el plano. ¿ Podrías resolver haciendo un sistema con las tres ecuaciones? ¿Cómo debería ser el determinante de la matriz de coeficientes en este caso?

13. Dada la recta $L: (x, y, z) = (1 + t, kt, 2 - t)$ y los puntos $A(-3,1,2)$ y $B(1,2,1)$.

- Halla k si existe tal que B pertenezca a la recta L
- Para $k = 2$ halla la ecuación paramétrica del plano que pasa por A y contiene a la recta L

14. Sea $L: \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$ halla

- el punto de la recta para $z = 1$
- los puntos de intersección de la recta con los planos coordenados
- los cosenos directores de la recta

15. Encontrar la ecuación del plano π que cumple simultáneamente con:

- $(0,0,0) \in \pi$
- $\pi \perp \pi_1$ donde $\pi_1: x + y - z = 1$
- π es paralelo a L donde L es $x + y + z = 0 \wedge x + 2y - z = 1$

16. Dadas las rectas:

$$L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{n} ; \quad L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = z$$

Calcula el valor de "n" para que L_1 y L_2 sean concurrentes (2, -3,1)

EJERCICIOS DE DISTANCIA

1. Halla la distancia del punto al plano indicado.

- $P(-2, 2, 3)$; $\alpha: 2x + y - 12 = 0$
- $Q(7, 3, 4)$; $\beta: 6x + 3y + 2z - 12 = 0$
- $R(1, -2, 3)$; $\gamma: 2x - 3y + 2z = 0$

2. Un plano tiene como ecuación general $4x + 4y + 2z - 18 = 0$. Halla

- la distancia del plano al origen
- la distancia del punto $M(0, 5, 3)$ al plano
- el punto Q del plano más próximo al origen

3. Calcula la distancia del punto (1,0,2) a la recta: $L: \begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$

4. Si un plano pasa por $P(2, 3, -5)$ y es paralelo al plano $\gamma: x - 2y + 3z = 6$. ¿Cuál es la distancia entre ambos planos?

5. Si un plano pasa por $P(1, 2, -3)$ y es paralelo al plano $\beta: 2z = 4$. ¿Cuál es la distancia entre ambos?

6. Dada $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z + 3$. Obtén:

- el punto donde L corta al plano XZ
- la distancia entre dicho punto y el plano $\pi: x - 3y + z = 0$
- la distancia desde el origen a la recta L

7. Sean las rectas $L_1: (x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda (0, -1, 1)$ y $L_2: \begin{cases} y = 1 \\ z = k \end{cases}$ determina los valores de $k \in \mathcal{R}$ tal que la distancia sea igual a 2.

8. Halla si es posible, las ecuaciones de los planos con normal $\vec{n} = (4, -2, 4)$ que están a una distancia 5 del punto $P(0, 1, -1)$

9. Dados el plano $\pi: 3x + 2y + cz = 12$ y el punto $P(1, -1, 0)$ halla todos los valores de c para los cuales la distancia de P al plano es igual a 3.

10. Si $\pi_1: 6x - 3y - 2z = 35$ es paralelo a $\pi_2: 6x - 3y - 2z = -63$, calcula la distancia entre ambos planos.

11. Dados el plano $\pi: (x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda (1, 0, c) + u (0, 1, 0)$ y la recta $L: \begin{cases} x + y - z = -3 \\ x + y + 3z = 9 \end{cases}$
Halla el valor de $c \in \mathbb{R}^+$ tal que el ángulo entre L y π sea igual a 30°

12. Dada la recta

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$$

y el punto $M(1, 1, 1)$ que no pertenece a ella, halla el punto simétrico de M respecto de dicha recta.

13. Dadas la recta

$$L: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{2h} = z-1$$

con $h \neq 0$ y el plano $\pi: x + hy - 15z + k = 0$. Se pide:

- los números reales con $h < 0$ y $k > 25$ tales que $L \parallel \pi$ y la distancia entre ambos sea $\frac{\sqrt{235}}{47}$
- los números reales h y k tales que $L \cap \pi = (1/4, 3/2, 1/4)$

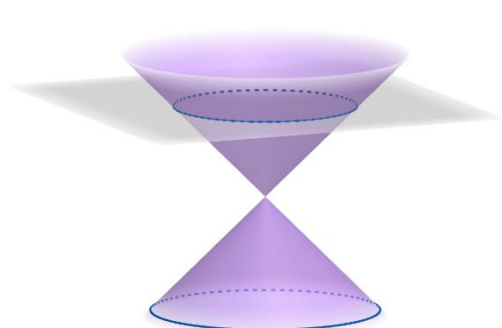
CÓNICAS Y CUADRICAS

LAS CÓNICAS

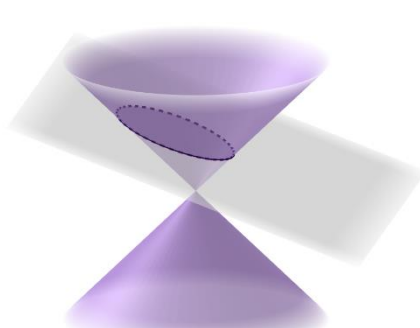
En la Unidad 1, estudiamos que una ecuación de primer grado puede ser una recta o un plano de acuerdo a la dimensión en la que trabajamos. En ésta unidad analizaremos las ecuaciones de segundo grado y su representación geométrica inicialmente en \mathbb{R}^2 y luego analizaremos dicha ecuación en \mathbb{R}^3 . En el plano una ecuación de segundo grado representa una **cónica**. La ecuación general de segundo grado o ecuación cuadrática en \mathbb{R}^2 tiene la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

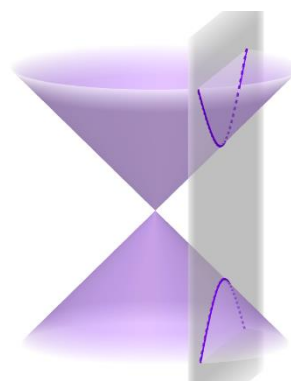
en la cual a y c no pueden ser simultáneamente nulos y b será igual a cero, ya que el análisis que haremos será con curvas planas cuyos ejes son paralelos o coinciden con los ejes coordenados, (si b es distinto de cero las curvas estarían rotadas). Las ecuaciones de segundo grado representan (con 3 excepciones punto, par de rectas concurrentes y recta) a **secciones cónicas**. Las cónicas surgen por la intersección de un plano con un cono truncado por el vértice, el cual no tiene base o extremo por lo que se prolonga indefinidamente en ambas direcciones. Las cónicas son: la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola. A los demás casos se les llama cónicas degeneradas que se da cuando el plano pasa por el vértice del cono. En el caso de la circunferencia y la elipse dicha intersección sería un punto, en el caso de la hipérbola un par de rectas concurrentes y cuando el plano es paralelo a una de las rectas generatrices del cono y además pasa por el vértice es una recta. Existen otros dos casos representados por las ecuaciones de segundo grado: par de rectas paralelas y que no exista lugar geométrico.



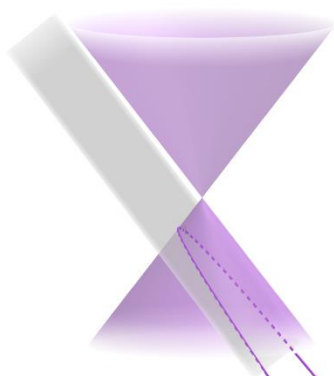
Circunferencia



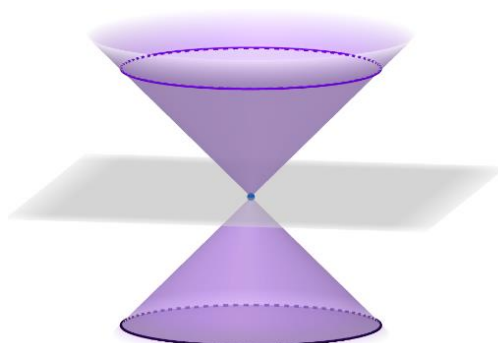
Elipse



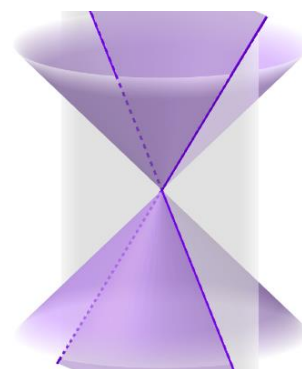
Hipérbola



Parábola



Punto

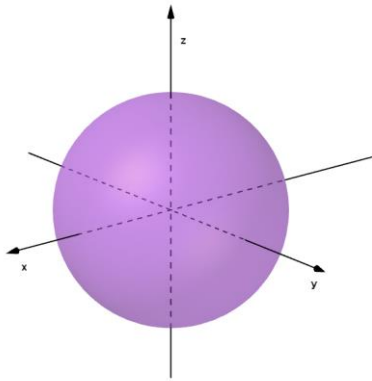


Par de rectas concurrentes

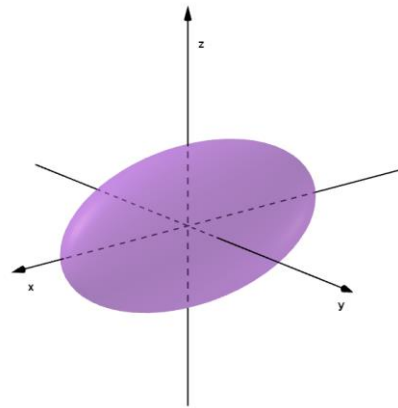
En el espacio una ecuación de segundo grado representa una superficie cuádrica, hay muchas más variaciones que en el plano y se representa por una ecuación que tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

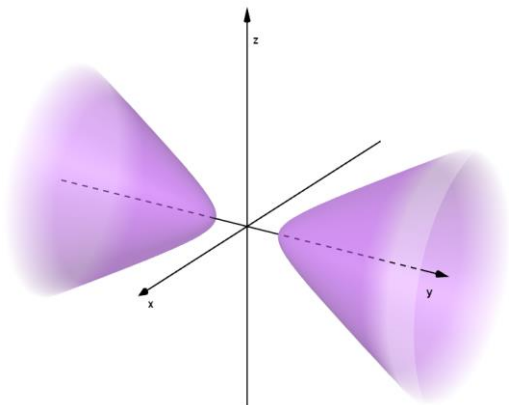
donde los productos cruzados xy , xz e yz son iguales a cero debido a que las superficies no están rotadas. Las **trazas** de una superficie sobre los planos coordenados son las intersecciones de ella con los planos coordenados o con planos paralelos a los planos coordenados, éstas trazas sobre los planos coordenados son cónicas o cónicas degeneradas.



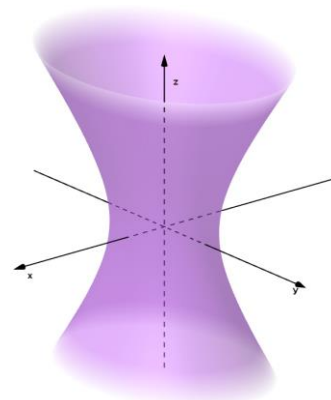
Esfera



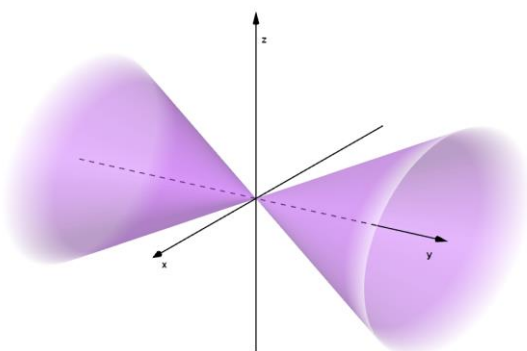
Elipsoide



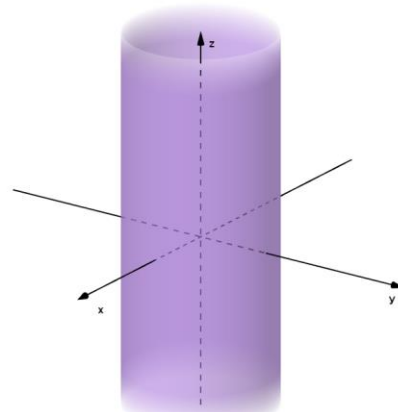
Hiperboloide de dos hojas



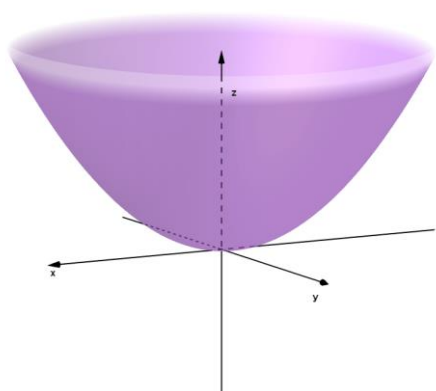
Hiperboloide de una hoja



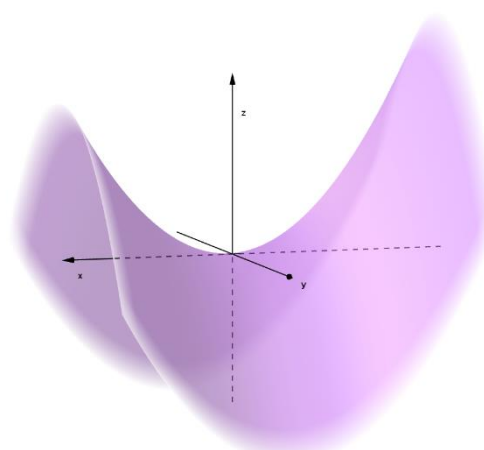
Cono



Cilindro



Paraboloide



Paraboloide hiperbólico

CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN: Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es igual a una constante, llamada radio

$$C = \{P: d(P, C) = r\}$$

ECUACIÓN CARTESIANA: Si referimos los puntos a un sistema de referencia, entonces:

$P(x, y)$: Punto genérico de la circunferencia.

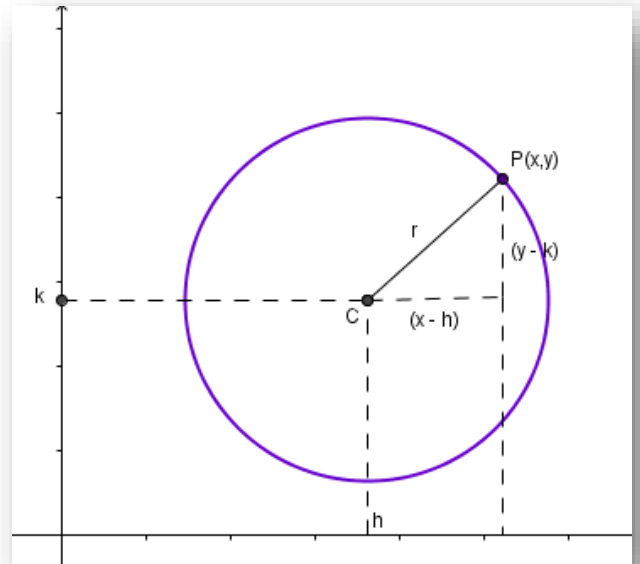
$C(h, k)$: Centro de la circunferencia.

d : distancia entre el punto P y el centro C .

r : radio de la circunferencia, y es igual a $d(P, C)$

y por lo tanto:

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}.$$



En forma vectorial es $|\vec{CP}| = r \Rightarrow |\vec{CP}|^2 = r^2$ y obtenemos entonces la ecuación cartesiana de la circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

La ecuación de la circunferencia con centro $C(2, -1)$ y radio $r = 2$ es:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Desarrollando cuadrados y agrupando términos se puede expresar también:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

Propuestos 1:

1. Halla el lugar geométrico (lg) de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los ejes coordenados sea igual al cuadrado de su distancia al origen.
2. Halla el lg de los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al punto fijo $C(2, -1)$ sea igual a 5.
3. Halla la ecuación de la circunferencia con los datos que se dan a continuación:
 - a. Centro en $C(-1, 3)$ y pasa por el origen.
 - b. Un diámetro de la misma une los puntos $A(-2, -2)$ y $B(6, 8)$.
 - c. Centro $C(-3, 4)$ y es tangente al eje de las abscisas.

CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES PUNTOS

Por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia.

Halla la ecuación de la circunferencia dados los puntos $P(-2,2)$, $Q(1,5)$, $R(5,1)$.

Solución: debe comprobarse que los puntos no pertenecen a una misma recta y buscar el centro C , planteando que: $d(C, P) = d(C, Q) = d(C, R)$

Esta ecuación permite formar un sistema lineal de ecuaciones, en las incógnitas h y k .

$$\begin{cases} d(C, P) = d(C, Q) \\ d(C, P) = d(C, R) \end{cases} \quad \begin{cases} (-2 - h)^2 + (2 - k)^2 = (1 - h)^2 + (5 - k)^2 \\ (-2 - h)^2 + (2 - k)^2 = (5 - h)^2 + (1 - k)^2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $k = \frac{3}{2}$, $h = \frac{3}{2}$

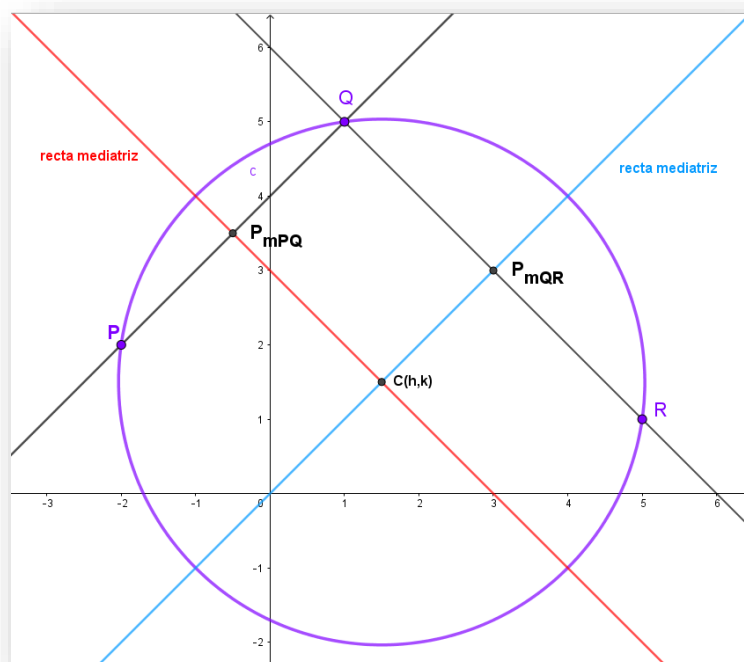
Considerando

$r = |\overline{QC}| = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ y la ecuación de la circunferencia resulta:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Otra posibilidad de resolución es:

1. determinar las rectas que pasan por PQ y QR
2. calcular los puntos medios de ambas rectas P_{mPQ} y P_{mQR}
3. calcular las rectas mediatrices (son \perp a las rectas y pasan por el punto medio)
4. hacer la intersección entre las rectas mediatrices, que nos dará el centro $C(h, k)$ de la circunferencia



ECUACIÓN CUADRÁTICA: La ecuación de la circunferencia corresponde a una ecuación de segundo grado en dos variables de la forma:


$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

donde los coeficientes de los términos cuadráticos deben ser iguales, $a = c$ (siempre es posible tomarlos como unidad positiva) y el término rectangular (el producto de xy) $b = 0$, ya que sus ejes son paralelos a los ejes coordenados. La recíproca no siempre se cumple, es decir no toda ecuación de la forma (1), con la característica indicada para los coeficientes de los términos cuadráticos, representa una circunferencia.

Por ejemplo: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ donde $d = e = 0$; $f = 1$, no representa una circunferencia, ya que no existen puntos en el plano cuyas coordenadas las satisfagan. Se observa que de ser posible resultaría: $x^2 + y^2 = -1$. Pero sabemos que $x^2 + y^2 \geq 0$, ¿Por qué? ¿Cómo decidir entonces cuando la ecuación corresponde a una circunferencia?

Una forma de decidir es completando cuadrados en x e y , y comparando la ecuación resultante con la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ que si representa una circunferencia.

Decidir si $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ representa o no una circunferencia. En caso afirmativo indicar su centro y radio.

Solución:  Completar el cuadrado en x , significa sumar a los términos $x^2 + 4x$, un término adecuado de forma tal que la expresión resulte un trinomio cuadrado perfecto (desarrollo del cuadrado de un binomio).

Se tiene que $x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x + 2)^2 - 4$.

Completando en y de la misma manera $y^2 - 6y = y^2 - 6y + 9 - 9 = (y - 3)^2 - 9$.

Reemplazando en la ecuación dada se tiene: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 - 9 + 3 = 0$ o bien:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

Como el segundo miembro es positivo, es comparable con r^2 , es decir:

$$r^2 = 10 \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

El primer miembro indica que $h = -2$ y $k = 3$.

La ecuación dada representa una circunferencia con centro $C(-2,3)$ y radio $r = \sqrt{10}$.

Observación: Si el segundo miembro resulta negativo, la ecuación no es satisfecha por ningún punto, es una circunferencia imaginaria, también se suele decir que no existe lugar geométrico. Si el segundo miembro es cero, la ecuación es satisfecha por un único punto (h, k) , es una circunferencia punto.

Propuestos 2: Decide cuáles de las siguientes ecuaciones representan circunferencias:

a. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$

b. $x^2 + y^2 = -4$

c. $-x^2 - y^2 + 8x = 0$

d. Obtén la ecuación y grafica la circunferencia de radio 5 que pasa por los puntos $A(2,0)$ y $B(3,3)$ (dos soluciones).

e. Comprueba que el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia al punto $A(3,0)$ es dos veces la distancia al punto $B(-3,0)$, es una circunferencia.

POSICION RELATIVA ENTRE RECTA Y CIRCUNFERENCIA

Recordemos que en la ecuación general de la recta en \mathbb{R}^2 $ax + by + c = 0$ los coeficientes que multiplican a las variables x e y corresponden al vector normal $\vec{n} = (a, b)$. Con el concepto de proyección, visto en la unidad 1, podremos calcular la distancia desde el centro $C(h, k)$ de la circunferencia a la recta L . Recordando que:

$$\text{proy}_{\vec{n}} \vec{PC} = \frac{\vec{PC} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \quad (1)$$

siendo $P\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ un punto de la recta L , entonces $\vec{PC} = \left(h + \frac{c}{a}, k\right)$ sustituyendo en (1) nos queda:

$$\text{proy}_{\vec{n}} \vec{PC} = \frac{\left(h + \frac{c}{a}, k\right) \cdot (a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a \cdot h + b \cdot k + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

En conclusión la $\text{proy}_{\vec{n}} \vec{PC} = d(C, L)$

Dada una circunferencia C y una recta L , puede ocurrir:

a. Que L tenga con C dos puntos en común. Se dice que L es una recta secante

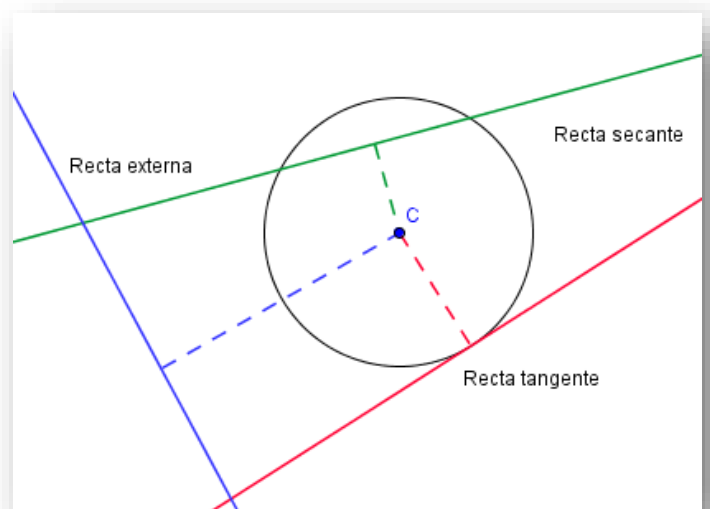
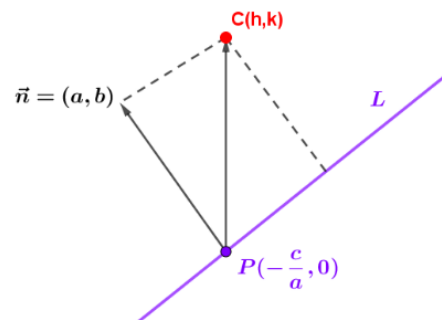
$$d(C, L) < r$$

b. Que L tenga con C , un punto en común. Se dice que L es tangente a la circunferencia y ese punto común se llama punto de contacto o punto tangente

$$d(C, L) = r$$

c. Que L no corte a C . Se dice que L es exterior a C

$$d(C, L) > r$$



Decide la posición de la recta L respecto de la circunferencia $C: x^2 + y^2 = 2$ y $L: y = x - 2$

Solución:

La proyección escalar de \overrightarrow{CA} sobre el vector normal de L $\vec{n} = (1, -1)$ nos dará la $d(C, L)$

$$d(C, L) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{CA} \rightarrow \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{CA} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$d(C, L) = \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{CA} = \frac{(2, 0)(1, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

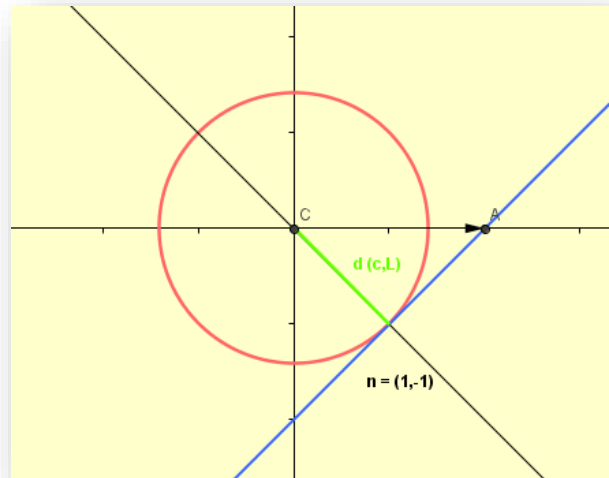
$$d(C, L) = r$$

O bien ocupando la ecuación (2)

$$d(C, L) = \frac{a \cdot h + b \cdot k + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(C, L) = \left| \frac{1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2}{\sqrt{2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Como la distancia del Centro de la circunferencia a la recta es igual al radio, la recta L es tangente a la circunferencia



Determina el valor de m para que $L: y = mx - 2$ sea secante a la circunferencia $C: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Solución:

Para que la recta sea secante a la circunferencia se debe cumplir que $d(C, L) < r \rightarrow d(C, L) < 3$

Si las coordenadas del centro de la circunferencia son $C(3, 4)$

$$d(C, L) = \frac{a \cdot h + b \cdot k + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{m \cdot 4 - 1 \cdot 2 - 2}{\sqrt{m^2 + 1^2}}$$

$$d(C, L) = \frac{m \cdot 4 - 4}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 3 \rightarrow 4m - 4 = 3\sqrt{m^2 + 1^2}$$

Propuestos 3: Decide como es la posición de la recta L con respecto a la circunferencia C , en los siguientes casos:

a. $C: x^2 + y^2 = 5$; $L: 2x + 3y = 6$

b. $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$; $L: x = \lambda \wedge y = 1 - \lambda$

c. $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$; $L: \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1}$

d. $C: x^2 + y^2 = 1$; $L: \{(x, y) / P(0, \sqrt{2}) \in L \wedge \vec{u} = (1, 1) \text{ vector director}\}$

OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS COMUNES A UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

Dadas la recta $L: y = mx + b$ y la circunferencia $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ las coordenadas de un punto común a L y a C , deben satisfacer las dos ecuaciones. Para hallar esas coordenadas, se resuelve el sistema formado por ambas:

$$\begin{cases} y = mx + b & (1) \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ que puede dar:

- raíces reales distintas \rightarrow a cada valor de x le corresponde un único valor de y , el cual se obtiene reemplazando en (1), la recta es secante a la circunferencia $\rightarrow b^2 - 4ac > 0$
- raíces reales y coincidentes (raíces dobles) \rightarrow la recta es tangente a la circunferencia $\rightarrow b^2 - 4ac = 0$
- raíces complejas \rightarrow no hay puntos comunes a L y C , (L es exterior a C), $b^2 - 4ac < 0$

Halla, si es posible, los puntos comunes a $C: x^2 + y^2 = 2$ y a $L: y = x - 2$

Solución: Se resuelve el sistema: $\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

$$x^2 + (x - 2)^2 = 2$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

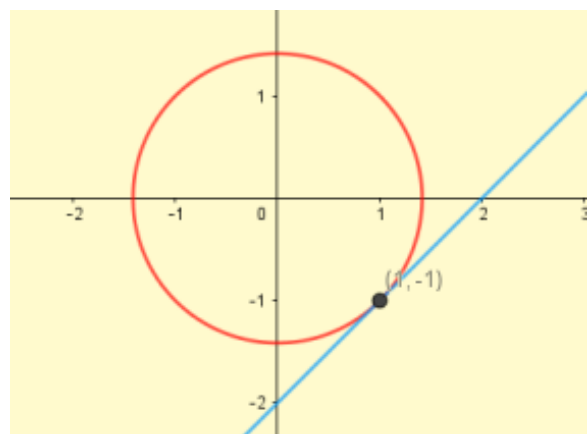
Se buscan las raíces de esta ecuación:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} \rightarrow x_{1,2} = 1$$

El valor de x reemplaza en la ec. de la recta y se obtiene el valor de $y_{1,2} = -1$

Es una raíz doble (Caso b)- $\sqrt{16 - 16} = 0$

La recta es tangente a la circunferencia en el punto $P(1, -1)$



Propuestos 4:

- ¿Qué valores puede tomar k para que la recta $y = 3x + k$, sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$?
- Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $P(2, -1)$.
- Halla la ecuación de la circunferencia tangente a ambos ejes y de radio $r = 4$.
- Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -5)$ y tangente a la recta $2x + y - 3 = 0$.

TRABAJO PRÁCTICO: CIRCUNFERENCIA

1. Halla la ecuación de la circunferencia:
 - a. De centro $(2, -1)$ y radio 3.
 - b. De centro $(1, -3)$ y que pasa por el punto $(4, 5)$.
 - c. De diámetro el segmento que une los puntos $(2, 5)$ y $(6, -3)$.
 - d. Pasa por los puntos $(2, -1)$, $(0, 2)$ y $(1, 1)$.
 - e. De centro en el punto $(-4, 3)$ y que sea tangente al eje y .
 - f. De centro en el punto $(3, -4)$ y que pase por el origen.
 - g. De centro en el origen y que pase por el punto $(6, 0)$.
 - h. Que sea tangente a los ejes coordenados, de radio $r = 8$ y cuyo centro esté en el 1^{er} cuadrante
 - i. Que pasa por el origen, por el punto $(4, 8)$ y tiene su centro en la recta $y = 3$.
 - j. De radio 5, centro en la recta $x = 3$ y es tangente a la recta $3x - 4y + 31 = 0$.
 - k. Que pase por el origen, de radio $r = 10$ y cuya abscisa de su centro sea -6 .
2. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto de intersección de las rectas: $L_1: x - 2y - 1 = 0$ $L_2: x + 3y - 6 = 0$
3. Transforma la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y - 26 = 0$ a su forma cartesiana y dibuja su gráfica.
4. Encuentra la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes, cuyo centro se encuentra sobre la recta $2x - 3y + 5 = 0$.
5. Tangente al eje y , pasa por el punto $P(7, 9)$ y tiene su centro sobre la recta $x - y + 1 = 0$.
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $(0, -1)$, $(4, -5)$ y $(0, -9)$.
7. Halla el centro y el radio de las circunferencias siguientes. Determina si cada una de ellas es real, imaginaria o se reduce a un punto.
 - a. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$
 - b. $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$
 - c. $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$
 - d. $x^2 + y^2 = 0$
 - e. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$
 - f. $-x^2 - y^2 + 8x = 0$
8. Determina si la recta $3x + 4y - 8 = 0$ es tangente, secante o exterior a las circunferencias del ejercicio anterior.

9. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(5, 3)$ que tiene su centro en la recta $x - y + 2 = 0$.
10. Verifica si la recta $x + 2y - 13 = 0$ corta a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$, si es así determine los puntos de intersección.
11. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, -3)$ que sea tangente a la recta que une los puntos $(-2, 4)$ y $(2, 1)$.
12. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por $(0, 0)$ de radio $r = 13$ y la abscisa de su centro sea -12 .
13. Halla la ecuación de la circunferencia de radio 10 que sea tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$ en el punto $(7, 2)$.
14. Obtén la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x - y = 2$ en el punto $(4, 2)$ y cuyo centro está en el eje x .
15. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$, escribe la ecuación de las tangentes que tengan pendiente $-1/2$.

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

¿Puedes...

- ✓ hallar la ecuación de una circunferencia, dados su centro y su radio?
- ✓ cambiar la ecuación de la circunferencia a su forma canónica y hacer la gráfica?
- ✓ hallar la ecuación de una circunferencia, dadas las coordenadas del centro y un punto por la que pasa?
- ✓ obtener la ecuación de una circunferencia, dadas las coordenadas de los extremos de su diámetro?
- ✓ escribir la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos dados?
- ✓ hallar la ecuación de una circunferencia que pasa por dos puntos dados y que tiene su centro sobre una recta de ecuación conocida?
- ✓ decidir la posición entre una recta y la circunferencia?
- ✓ calcular la intersección entre la recta y la circunferencia?

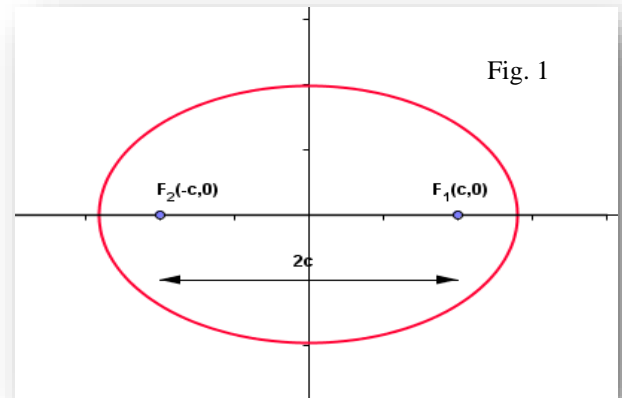
ELIPSE

DEFINICIÓN: La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en forma tal que la suma de las distancias del punto $P \in E$ a otros dos puntos fijos, sea igual a una constante “ $2a$ ”. (Fig. 1)

$$E = \{P: |PF_2| + |PF_1| = 2a\}$$

ELEMENTOS DE LA ELIPSE (Fig. 1)

- Los puntos fijos son los **focos** $F_2(-c, 0)$ y $F_1(c, 0)$ y la recta que une los focos es el **eje principal**.
- El punto medio del segmento $\overline{F_2F_1}$ es el centro $C(h, k)$ de la elipse.
- La distancia entre F_2 y F_1 que se indica con $2c$ es llamada **distancia focal**.



CONSTRUCCION DE LA ELIPSE

Se puede realizar la gráfica de una elipse de la manera indicada en la (Fig. 2). Este método es conocido con el nombre de método del agricultor ya que era utilizado en la antigüedad para el trazado de canteros de forma elíptica.

<p>Fig. 2</p> <p>Se toma un hilo y se fijan en dos puntos fijos del eje de las abscisas, equidistantes del origen, tales que la $d(F_2, F_1)$ sea menor a la longitud del hilo.</p>	
<p>Se toma un lápiz y con la punta se estira el hilo</p>	
<p>Se dibuja la curva que se obtiene al mover el lápiz de manera que siempre se mantenga estirado el hilo</p>	

TRAZADO DE LA ELIPSE CON EL USO DEL COMPÁS

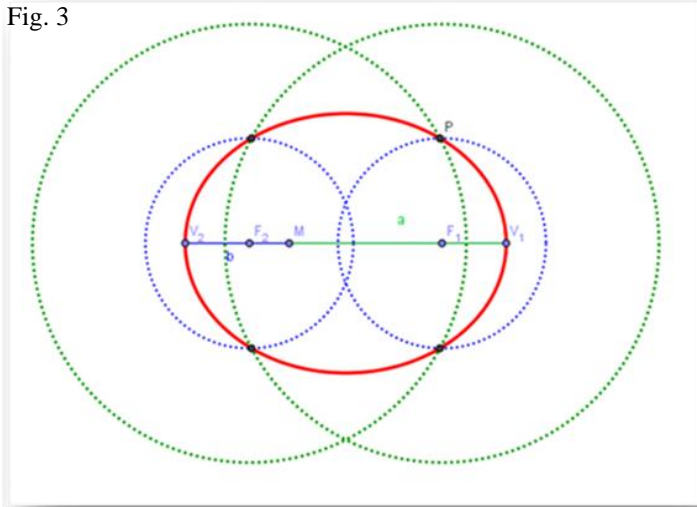
Se puede construir una elipse por medio de puntos, de la siguiente manera Fig. 3:

1ro.: Se dibuja el eje mayor V_2V_1 y se ubican los focos F_2 y F_1

2do.: Se marca un punto M en el segmento de recta entre F_2F_1 .

3ro.: Con centro en los focos, se trazan circunferencias con un radio igual a MV_1 . A continuación y con centro en los mismos puntos se trazan circunferencias con radio igual a MV_2 que corta a la circunferencia anterior produciéndose 4 puntos sobre la elipse. (Se pueden hallar otros puntos variando la posición de M).

Fig. 3



Para demostrar la validez de esta construcción, llamamos P a un punto de la elipse y observamos que $\overline{MV_1} = \overline{F_2P}$ y $\overline{MV_2} = \overline{F_1P}$; por lo tanto $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{MV_2} + \overline{MV_1}$ la cual es la longitud del eje mayor. Esta longitud permanece constante; es decir, $\overline{V_1M} + \overline{MV_2}$ es siempre igual a $\overline{V_1V_2}$ y entonces la suma de las distancias desde los focos a cualquier punto de la curva es una constante.

ECUACION CANONICA DE LA ELIPSE

Para deducir una forma sencilla de la ecuación de la elipse, usaremos como eje principal uno de los ejes coordenados, y como centro el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$

En este caso haremos coincidir el eje principal con el Eje x , y el centro con el origen de coordenadas.

Recordando la definición de elipse, que nos dice que es el lugar geométrico de un punto que se mueve en forma tal que la suma de las distancias del punto a otros dos puntos fijos, sea una constante, podemos expresar esa constante por $2a$ como la suma de las distancias de cualquier punto $P(x, y)$ sobre la elipse hasta los focos

$$|\overline{PF_2}| + |\overline{PF_1}| = 2a$$

Hasta ahora tenemos el triángulo F_1PF_2 (Fig. 4) donde P es un punto cualquiera de la elipse, cuyas coordenadas son (x, y) partir del cual podemos ver que

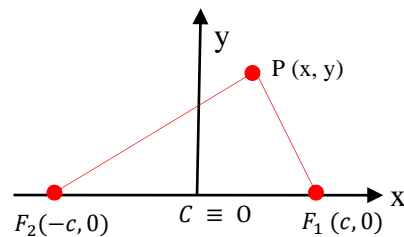


Fig. 4

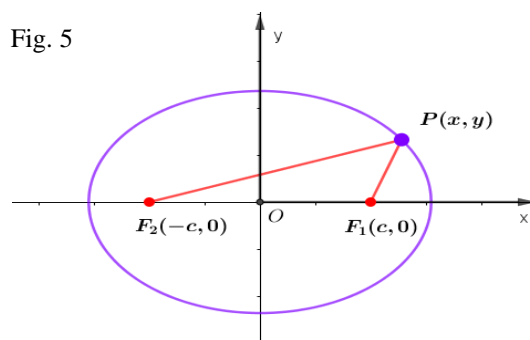
$2a$ debe ser mayor que $2c$ debido a que la suma de dos lados de un triángulo es siempre mayor el tercer lado. En consecuencia, tenemos que a será mayor que c

$$a > c \Rightarrow a^2 > c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$$

Para deducir la ecuación canónica debemos recordar un concepto visto anteriormente: ¡¡Pitágoras y estar sumamente atentos en todos los pasos que se van a realizar!!

• **Con centro en el origen, eje focal el eje x**

Haciendo el análisis de distancia a partir de la definición de lugar geométrico (fig. 5)



$$d(P, F_2) + d(P, F_1) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

Desarrollando los binomios y simplificando

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

Agrupando y elevando al cuadrado ambos miembros

$$(\cancel{4xc} - \cancel{4a^2})^2 = (-\cancel{4a}\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \text{ simplificando y desarrollando el binomio}$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \text{ aplicando propiedad distributiva}$$

$$x^2c^2 - \cancel{2xca^2} + a^4 = a^2x^2 - 2xc\cancel{a^2} + a^2c^2 + a^2y^2 \text{ simplificando}$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 \text{ como } a^2 - c^2 > 0 \text{ entonces } a^2 - c^2 = b^2$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ dividiendo por } a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde a y b son las intersecciones en los ejes coordenados elevadas al cuadrado.

Hay que recordar que $a > b$, en esta forma siempre podemos decir cuál es el eje mayor.

Reconoce, da sus elementos y grafica, la elipse de ecuación $2x^2 + 4y^2 = 16$

Solución: Dividiendo por 16 se lleva a la forma canónica

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

El número mayor es 8 que acompaña a la variable x, indica que el eje principal o mayor es el eje OX

$$a^2 = 8 \rightarrow a = \sqrt{8} \rightarrow 2a = 2\sqrt{8} \text{ será la longitud del eje mayor}$$

$$b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{4} = 2 \rightarrow 2b = 4 \text{ será la longitud del eje menor}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{8 - 4} = 2 \rightarrow 2c = 4 \text{ será la distancia focal}$$

Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a $F_2(-2, 0)$ y $F_1(2, 0)$ sea igual a 8

Solución: planteando la condición de lugar geométrico

$$d(P, F_2) + d(P, F_1) = 2a$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 8$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{(x+2)^2 + y^2})^2 = (8 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2})^2$$

Simplificando y desarrollando los binomios

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 8^2 - 16\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$(8x - 64)^2 = (-16\sqrt{(x-2)^2 + y^2})^2 \text{ elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando}$$

$$(x - 8)^2 = 4(x - 2)^2 + 4y^2$$

$$x^2 - 16x + 64 = 4(x^2 - 4x + 4 + y^2) \text{ aplicando propiedad distributiva}$$

$$x^2 - 16x + 64 = 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 \text{ agrupando monomios semejantes}$$

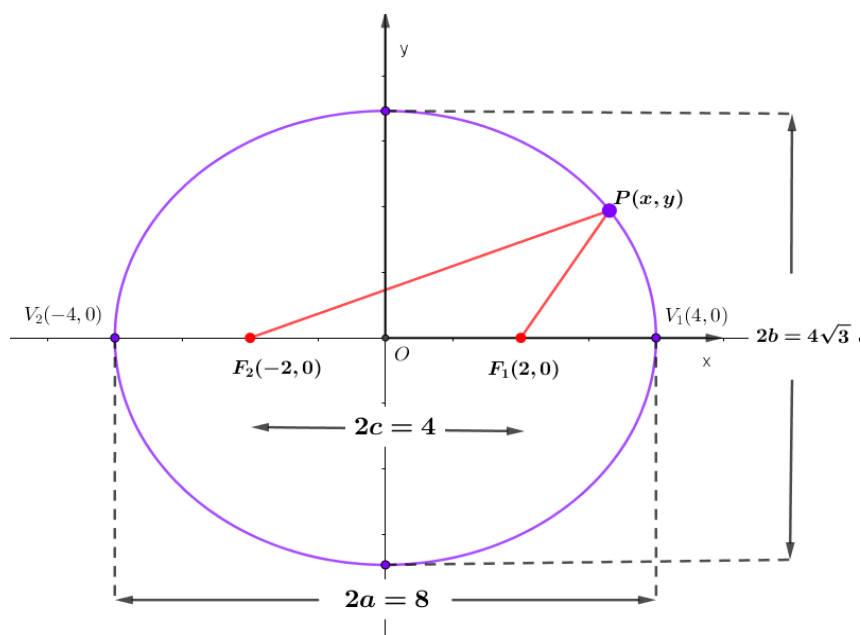
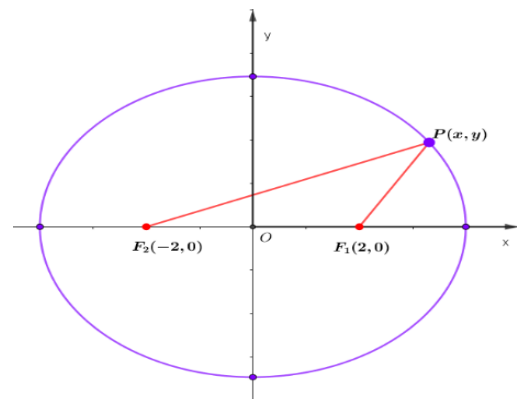
$$64 - 16 = 4x^2 - x^2 + 4y^2$$

$$48 = 3x^2 + 4y^2 \text{ Dividiendo por 48}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

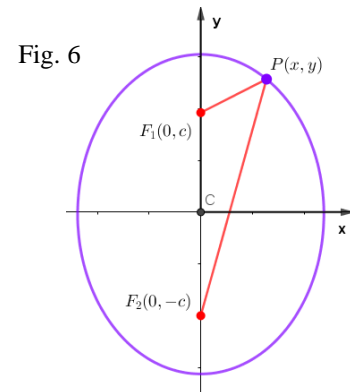
$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow 2a = 8 \text{ longitud del eje mayor - condición inicial}$$

$$b^2 = 12 \rightarrow b = 2\sqrt{3} \rightarrow 2b = 4\sqrt{3} \text{ longitud del eje menor}$$



- Con centro en el origen, eje focal el eje y

En este caso haremos coincidir el eje principal con el Eje y, y el centro con el origen de coordenadas (fig. 6)



$$d(P, F_2) + d(P, F_1) = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} + \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2a$$

$$(\sqrt{x^2 + (y + c)^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + (y - c)^2})^2 \text{ elevando al cuadrado ambos miembros}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2yc + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2yc + \cancel{c^2} \text{ simplificando}$$

$$(\cancel{4}yc - \cancel{4}a^2)^2 = (-\cancel{4}a\sqrt{x^2 + (y - c)^2})^2 \text{ elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando}$$

$$y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 = a^2(x^2 + y^2 - 2yc + c^2) \text{ aplicando propiedad distributiva}$$

$$y^2c^2 - 2\cancel{y}ca^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2\cancel{y}ca^2 + a^2c^2 \text{ agrupando monomios semejantes}$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - y^2c^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2) \text{ como } a^2 - c^2 > 0 \text{ entonces } a^2 - c^2 = b^2$$

$$x^2a^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \text{ Dividiendo por } a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Donde a y b son las intersecciones en los ejes coordenados elevadas al cuadrado

Hay que recordar que $a > b$, en esta forma podemos ver que el eje mayor corresponde al Eje y

Reconoce, da sus elementos y grafica, la elipse de ecuación $4x^2 + 2y^2 = 16$

Solución: Dividiendo por 16 se lleva a la forma canónica

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$$

El número mayor es 8 que acompaña a la variable y, por lo indica que el eje principal o mayor es el eje OY.

$$a^2 = 8 \rightarrow a = \sqrt{8} \rightarrow 2a = 2\sqrt{8} \text{ será la longitud del eje mayor}$$

$$b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{4} = 2 \rightarrow 2b = 4 \text{ será la longitud del eje menor}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{8 - 4} = 2 \rightarrow 2c = 4 \text{ será la distancia focal}$$

PROPIEDADES DE LA ELIPSE CON CENTRO C(0,0)

a) Simetría: es simétrica respecto de los ejes coordenados y del origen, ya que la ecuación no se modifica cuando x se reemplaza por $-x$, como tampoco cuando es reemplazada y por $-y$, y tampoco cuando ambas son reemplazadas por sus opuestos o negativos.

b) Valores excluidos: resolviendo la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ para y en función de x y para x en función de y , encontramos que

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad y \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

La primera de estas ecuaciones muestra que los únicos valores de x que dan valores reales de y son aquellos para los cuales $x^2 \leq a^2$. De la misma manera, de la segunda ecuación, los valores de y tales que $y^2 \leq b^2$ son los únicos que dan valores reales a x . Como los valores no reales están excluidos de la curva, ésta debe estar comprendida entre las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$.

c) Relaciones geométricas

El segmento de recta entre V_1 y V_2 de longitud $2a$ se llama **eje mayor**

El segmento de recta $B_1 B_2$ de longitud $2b$ se llama **eje menor**

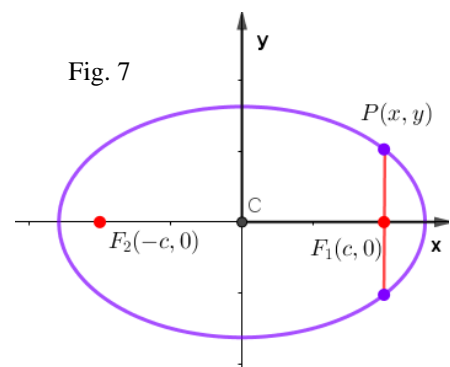
Las longitudes a y b corresponden al **semieje mayor** y **semieje menor** respectivamente.

La relación existente entre a , b y c está expresada por la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$ del teorema de Pitágoras.

La longitud de la cuerda que atraviesa la elipse en cualquiera de sus focos y perpendicularmente al eje mayor, se denomina **lado recto** y puede ser hallada sustituyendo $x = c$ o $x = -c$ en la ecuación de la elipse (fig.7)

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} \text{ como } a^2 - c^2 = b^2$$

$$y = \pm \frac{b^2}{a} \rightarrow \text{Lado Recto} = 2y = 2 \frac{b^2}{a}$$



EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE

La excentricidad de una elipse es la razón entre su semidistancia focal denominada por la letra “ c ” y su semieje mayor “ a ”

$$e = \frac{c}{a}$$

La excentricidad indica la forma de una elipse; una elipse será más redondeada cuanto más se aproxime su excentricidad al valor cero. Cuando $e = 0$ la elipse es una circunferencia. La excentricidad en la elipse mide, por tanto, lo que ésta se aleja de la circularidad. En la circunferencia los dos focos se confunden y son a su vez el centro de la cónica.

En la fig.8 siguiente se ve como varía la elipse al ir variando los valores de a y c .

Si $c \rightarrow a$ entonces la $e \rightarrow 1$; veríamos como la curva se achata, corresponde a la línea de puntos azul

Si $c \rightarrow 0$ entonces la $e \rightarrow 0$;la elipse tiende a ser una circunferencia, corresponde a la línea de puntos verde

Por lo tanto como $0 < c < a$ se tiene que

$$0 < e < 1$$

La excentricidad en función de los semiejes a y b resulta:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

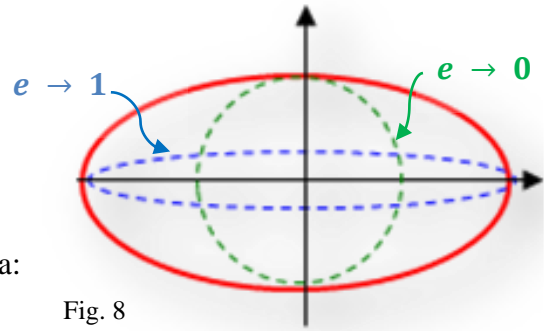


Fig. 8

De esta fórmula se deduce que si “ a ” es fijo y “ b ” toma valores tales que $0 < b < a$; tendremos:

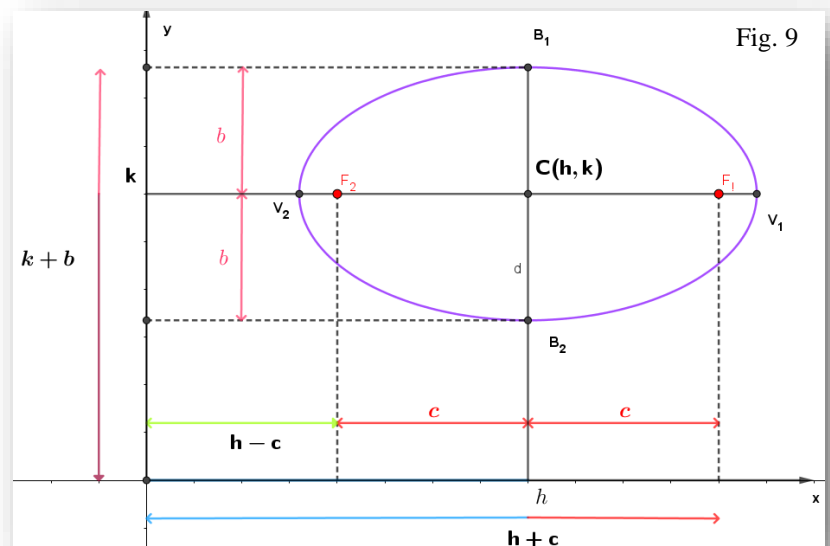
Si $b \rightarrow 0$, $e \rightarrow 1$, y más achatada resulta la elipse, corresponde a la línea de puntos azul.

Si $b \rightarrow a$, $e \rightarrow 0$, y los focos de tienden a coincidir con el centro, tendiendo la elipse a ser una circunferencia, corresponde a la línea de puntos verde.

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE CON CENTRO $C(h,k)$ Y EJE PRINCIPAL PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS.

Si el eje principal de una elipse es paralelo al eje OX y su centro es $C(h,k)$; su ecuación resulta:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Siendo (ver fig. 9):

Vértices	Extremos	Focos
$V_1(h + a, k)$	$B_1(h, k + b)$	$F_1(h + c, k)$
$V_2(h - a, k)$	$B_2(h, k - b)$	$F_2(h - c, k)$

Si desarrollamos los cuadrados de la ecuación canónica con $C(h,k)$ obtenemos la ECUACIÓN GENERAL

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde el signo $A = \text{signo } C$ y $A \neq C$

La ecuación de la elipse en su forma general puede reducirse a su forma canónica completando cuadrados

Analiza la ecuación $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

Solución: se cumple que los signos en los términos cuadráticos son iguales y de valores distintos

- completando cuadrados en x e y

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 + 4(y + 1)^2 = 4$$

$$(x + 1)^2 + 4(y - 1)^2 = 4$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + (y - 1)^2 = 1 \rightarrow C(-1,1)$$

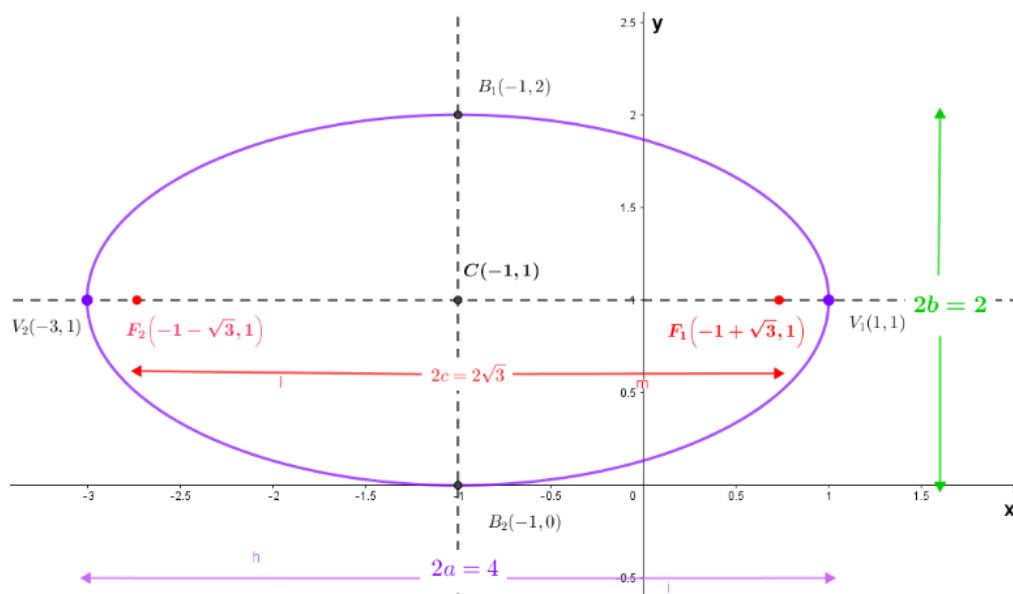
$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow 2a = 4 \text{ será la longitud del eje mayor}$$

$$b^2 = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow 2b = 2 \text{ será la longitud del eje menor}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \rightarrow 2c = 2\sqrt{3} \text{ será la distancia focal}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vértices	Extremos	Focos
$V_1(h + a, k) = (-1 + 2, 1) = (1, 1)$	$B_1(h, k + b) = (-1, 2)$	$F_1(h + c, k) = (-1 + \sqrt{3}, 1)$
$V_2(h - a, k) = (-1 - 2, 1) = (-3, 1)$	$B_2(h, k - b) = (-1, 0)$	$F_2(h - c, k) = (-1 - \sqrt{3}, 1)$

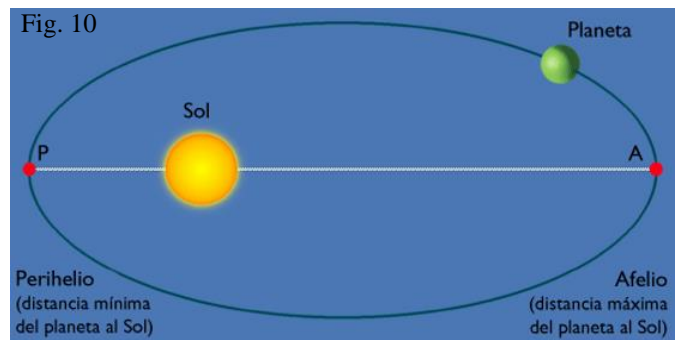


IMPORTANCIA DEL TEMA

Los cuerpos ligados gravitacionalmente entre sí describen órbitas en forma de elipse Fig. 10

Las elipses tienen algunas aplicaciones comunes con las demás cónicas y otras que son únicas. Durante siglos se creyó que las órbitas que describían los planetas alrededor del sol

eran circulares, sin embargo, fue Kepler en el siglo XVII quien demostró que las orbitas de los planetas era elíptica y que en uno de los focos estaba el sol.



Reflectores elípticos (fig. 11)



La otra propiedad que tienen las elipses con las demás secciones cónicas es la propiedad reflectora de los espejos elípticos. Una fuente luminosa colocada en un foco se refleja hacia el otro foco. La aplicación principal de esto se da en las llamadas bóvedas de los murmullos, que son unos recintos con bóveda elíptica en

donde una persona en uno de los focos puede murmurar a alguien que esté en el otro foco sin que lo oigan los demás.

Una aplicación más científica es el empleo de reflectores elípticos de ultrasonido para disgregar cálculos renales: se coloca el reflector de tal modo que el cálculo esté en uno de los focos y la fuente sonora en el otro, las ondas se concentran en la piedra haciéndola vibrar y desintegrándola.

Otra aplicación es en la aerodinámica e hidrodinámica en alas, quillas o timones elípticos producen menor resistencia a la fricción que otras formas.

En la construcción de arcos, aunque debieran ser parabólicos, a veces se construyen elípticos.

En la actualidad existen muchos aparatos para hacer gimnasia con mecanismos elípticos

TRABAJO PRÁCTICO: ELIPSE

1. En cada caso, halla la ecuación de la elipse con $C(0,0)$ que satisface las condiciones indicadas, grafica:
 - a. focos $(-4,0)$ y $(4,0)$; vértices $(5,0)$ y $(-5,0)$
 - b. focos $(0,8)$ y $(0, -8)$; vértices $(0,17)$ y $(0, -17)$
 - c. uno de sus focos $(-3; 0)$ y un vértice es $(5; 0)$,
 - d. uno de sus focos es $(0; 1)$ y un vértice es $(0; -6)$
 - e. focos $(0,6)$ y $(0, -6)$ semieje menor longitud 8
 - f. focos $(-5,0)$ y $(5,0)$; excentricidad $e = \frac{5}{8}$
 - g. vértice $(6,0)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$
 - h. eje mayor de longitud 10 y pasa por $P_0(2,3)$ (dos soluciones)

2. Halla el lugar geométrico de los puntos:
 - a. cuya distancia al punto $(-5;0)$ es igual a la mitad de la correspondiente a la recta $y - 16 = 0$.
 - b. cuya distancia al punto $(3;2)$ es la mitad de la correspondiente a la recta $x = -2$.
 - c. cuya suma de a los puntos fijos $(3,1)$ y $(-5;1)$ es igual a 10
 - d. cuya suma de distancias a los puntos $(2; -2)$ y $(-2; -2)$ es igual: 8 ; 4 y -8

3. Halla la ecuación de la elipse:
 - a. de centro en el origen, focos en el eje y, pasa por los puntos $(-3, 2\sqrt{3})$; $(4, \frac{\sqrt{5}}{3})$
 - b. de centro $(4, -1)$ uno de los focos $(1, -1)$ y pasa por el punto $(8,0)$
 - c. de centro $(3,1)$, uno de los vértices en $(3, -2)$ y excentricidad $e = \frac{1}{3}$
 - d. de centro $(-3,1)$ un extremo del eje menor en $(-1,1)$ y pasa por $(-2, -2)$.

4. Dada la siguiente elipse con ecuación $\frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(3y-6)^2}{25} = 1$ obtén:
 - a. coordenadas de los focos, de los vértices y centro
 - b. longitud de los ejes mayor y menor;
 - c. excentricidad y longitud de los lados rectos y representar gráficamente.

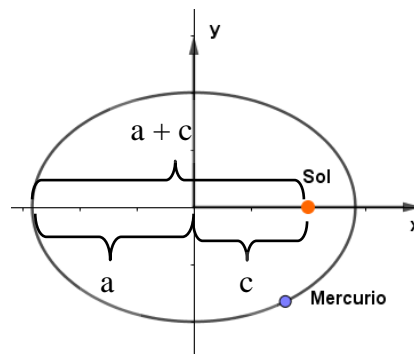
5. Deduce la ecuación del lado recto.

6. Lleva a la forma canónica y dar todos sus elementos. Representa gráficamente.
 - a. $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
 - b. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y - 37 = 0$
 - c. $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
 - d. $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 1 = 0$

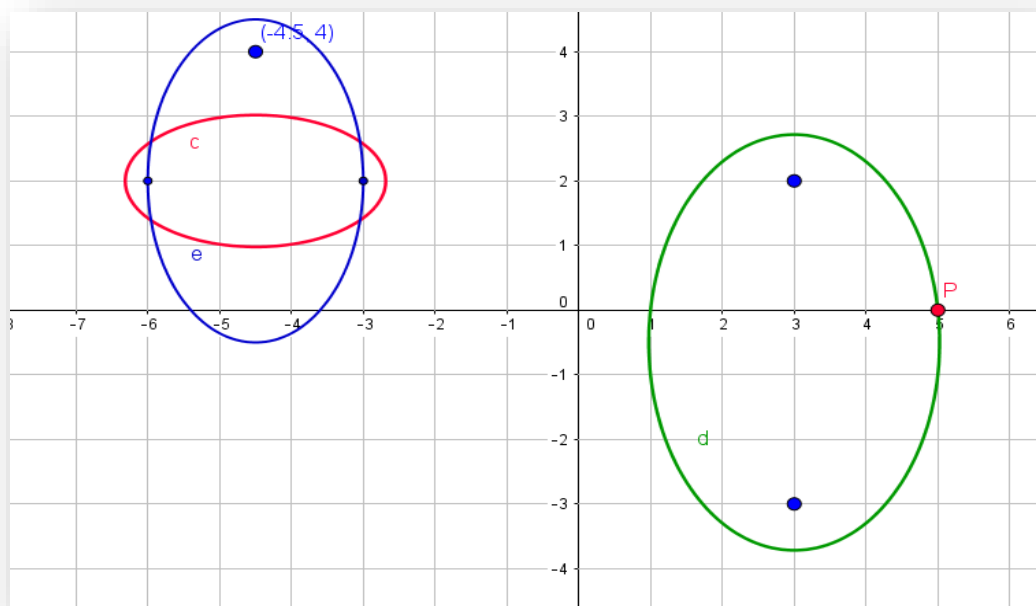
7. Un arco de un puente de 80m de luz tiene forma elíptica, sabiendo que la altura es de 30m, halla la altura del arco en un punto situado a 15 m de su centro.
8. Para que valores de k las siguientes ecuaciones representan una elipse, ¿cuál es el centro? ¿dónde se ubican los focos? ¿contiene dicha elipse el origen de coordenadas?

a) $\frac{x^2}{20-k} + \frac{y^2}{30-k} = 1$ b) $\frac{x^2}{|k-5|} + \frac{y^2}{k-3} = 1$ c) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 25 - k = 0$

9. Un ebanista desea fabricar una mesa elíptica, la cual debe tener 120" de longitud y 50" en su punto más ancho. Usa dos clavos y un cordón para trazar el tablero. ¿Dónde debe fijar los clavos y qué longitud debe tener el cordón?
10. La órbita del planeta Mercurio forma una elipse con el Sol en un foco. Esta elipse tiene un eje mayor de una longitud de 72 millones de millas y un eje menor de una longitud de 70,4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol? ¿Cuál es la máxima distancia (afelio)?



11. De acuerdo a la gráfica encuentrai las ecuaciones respectivas indicando todos sus elementos



HIPERBOLA

DEFINICION:

La hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a una constante

$$H = \{P: d(P, F_1) - d(P, F_2) = cte\}$$

ELEMENTOS DE LA HIPERBOLA

- ✓ F_1 y F_2 focos
- ✓ La recta que pasa por los focos es el eje principal
- ✓ Eje real o transverso: $2a$
- ✓ Eje imaginario o conjugado: $2b$
- ✓ Distancia focal: $2c$
- ✓ V_1 y V_2 vértices (puntos de la hipérbola que están contenidos en el eje principal)
- ✓ Centro es el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$
- ✓ Asíntotas
- ✓ LR: lado recto cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje principal

CONSTRUCCIÓN DE LA HIPERBOLA

Se puede construir una hipérbola por medio de puntos, de la siguiente manera (fig. 1):

1ro.: Se dibuja el eje principal V_1V_2 y se ubican los focos F_1 y F_2

2do.: Se marca un punto M en el segmento de recta y a la derecha de F_2 .

3ro.: Con centro en los focos, se trazan circunferencias con un radio igual a MV_2 . A continuación y con centro en los mismos puntos se trazan circunferencias con radio igual a MV_1 que corta a la circunferencia anterior produciéndose 4 puntos sobre la hipérbola. (Se pueden hallar otros puntos variando la posición de M).

Para demostrar la validez de esta construcción, llamamos P a un punto de la hipérbola y observamos que $\overline{MV_1} = \overline{F_1P}$ y $\overline{MV_2} = \overline{F_2P}$; por lo tanto $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \overline{MV_1} - \overline{MV_2}$ la cual es la longitud del eje real. Esta longitud permanece constante; es decir, $\overline{MV_1} - \overline{MV_2}$ es siempre igual a $\overline{V_1V_2}$ y entonces la diferencia de las distancias desde los focos a cualquier punto de la curva es una constante.

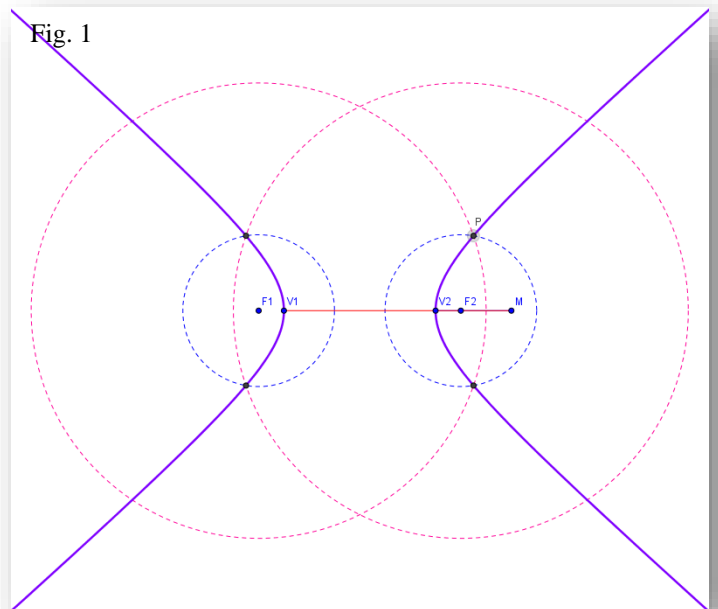


Fig. 1

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPERBOLA

Para deducir una forma sencilla la ecuación de la hipérbola, usaremos como eje principal coincidente con uno de los ejes coordenados y como centro el origen de coordenadas. El centro estará por lo tanto en el punto medio de los focos.

- Con centro $C(0,0)$, eje real el eje x

Haciendo el análisis de distancia a partir de la definición de lugar geométrico (fig. 2)

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados y simplificando

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Agrupando y elevando nuevamente al cuadrado

$$(4xc - 4a^2)^2 = (4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \text{ desarrollando binomios y simplificando}$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \text{ aplicando propiedad distributiva}$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \text{ simplificando}$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \text{ agrupando monomios semejantes}$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \text{ como } c^2 - a^2 > 0 \text{ entonces } c^2 - a^2 = b^2$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ dividiendo por } a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde a es la intersección en el eje coordenado x elevada al cuadrado. Hay que recordar que a acompaña al término positivo, en esta forma siempre podemos decir cuál es el eje real

Dada la ecuación $4x^2 - 2y^2 = 16$, escribe en forma canónica, e indica sus ejes y la distancia focal

Solución: Dividiendo por 16 se lleva a la forma canónica

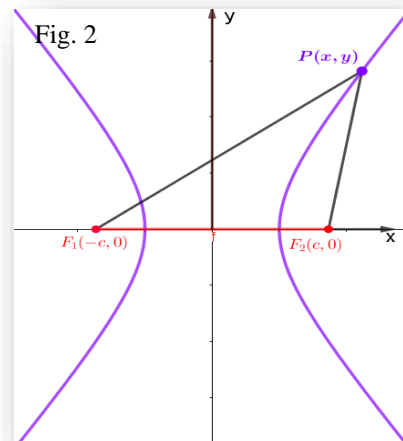
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$$

El número positivo es 4 que acompaña a la variable x , por lo indica que el eje real es el eje x .

$$a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = 2 \rightarrow 2a = 4 \text{ será la longitud del eje real}$$

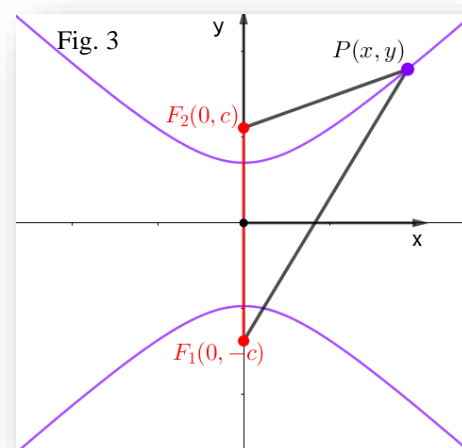
$$b^2 = 8 \rightarrow b = \sqrt{8} \rightarrow 2b = 2\sqrt{8} \text{ será la longitud del eje imaginario}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow c = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12} \rightarrow 2c = 2\sqrt{12} \text{ será la distancia focal}$$



- Con centro $C(0,0)$; eje real el eje y

Haciendo el análisis de distancia a partir de la definición de lugar geométrico (fig. 3)



$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(y+c)^2 + x^2} - \sqrt{(y-c)^2 + x^2} = 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{(y+c)^2 + x^2})^2 = (2a + \sqrt{(y-c)^2 + x^2})^2$$

desarrollando binomios

$$\cancel{y^2} + 2yc + \cancel{c^2} + \cancel{x^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} + \cancel{y^2} - 2yc + \cancel{c^2} + \cancel{x^2} \text{ simplificando}$$

$$\cancel{4yc} - \cancel{4a^2} = (4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2})^2 \text{ elevando al cuadrado ambos miembros}$$

$$y^2c^2 - 2ycac^2 + a^4 = a^2(y^2 - 2yc + c^2 + x^2) \text{ aplicando distributiva}$$

$$y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 = a^2y^2 - 2yca^2 + a^2c^2 + a^2x^2 \text{ simplificando}$$

$$y^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4 \text{ agrupando}$$

$$y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2) \text{ como } c^2 - a^2 > 0 \text{ entonces } c^2 - a^2 = b^2$$

$$y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2 \text{ dividiendo por } a^2b^2 \rightarrow$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Donde a es la intersección en el eje coordenado y elevada al cuadrado. Hay que recordar que a acompaña al término positivo, en esta forma siempre podemos decir cuál es el eje real.

PROPIEDADES DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO (0,0)

a) Simetría: es simétrica respecto de los ejes coordenados y del origen, ya que la ecuación no se modifica cuando x se reemplaza por $-x$, como tampoco cuando es reemplazada y por $-y$, y tampoco cuando ambas son reemplazadas por sus opuestos o negativos.

b) Valores excluidos: analizando la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ para y en función de x y para x en función de y , encontramos que:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$$

se puede ver que para que y sea real $x^2 \geq a^2$ es decir $a < x < -a$, vemos también que x es real para todos los valores de y

c) Relaciones geométricas

Si $y = 0 \rightarrow x = \pm a$ la hipérbola interseca al eje x en dos puntos, vértices reales $V_1(-a, 0); V_2(a, 0)$

Si $x = 0 \rightarrow$ no corta al eje y, vértices imaginarios $B_1(0, -b); B_2(0, b)$

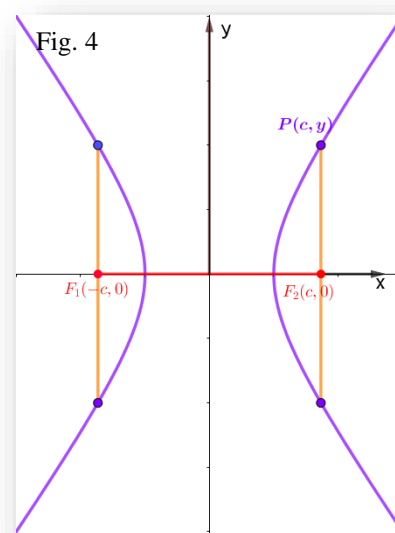
El segmento de recta V_1V_2 de longitud $2a$ se llama *eje real o transverso*

El segmento de recta $B_1 B_2$ de longitud $2b$ se llama *eje imaginario o conjugado*

Las longitudes **a** y **b** corresponden al **semieje real** y **semieje imaginario** respectivamente.

La relación existente entre a, b y c está expresada por la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$ por el teorema de Pitágoras

La longitud de la cuerda que atraviesa la hipérbola en cualquiera de sus focos y perpendicularmente al eje real, se denomina **lado recto** y puede ser hallada sustituyendo $x = c$ o $x = -c$ en la ecuación de la hipérbola (fig. 4).



$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = b^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) \rightarrow$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} \text{ como } c^2 - a^2 = b^2$$

$$y = \pm \frac{b^2}{a} \rightarrow \text{Lado Recto} = 2y = 2 \frac{b^2}{a}$$

d) Excentricidad de la hipérbola

Se define como la razón entre la distancia focal $2c$ y la longitud del eje real $2a$, como $c > a$ entonces la $e > 1$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ puede entonces expresarse

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

La excentricidad mide la mayor o menor abertura de las ramas de la hipérbola. Cuanto menor sea b, tanto menor será el ángulo formado por las asíntotas con el eje principal y tanto más aplastada resultará la hipérbola.

e) Asíntotas de la hipérbola

La asíntota de una curva es una línea recta tal, que la distancia perpendicular trazada desde la recta a un punto sobre la curva es, y permanece, menor que cualquier valor positivo que se le asigne a medida que el punto en la curva se aleja indefinidamente del origen

Hay una forma fácil de encontrar la ecuación de las asíntotas, se iguala a cero el lado derecho de la ecuación (eje real eje x) y luego se factoriza, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0 \rightarrow (bx - ay)(bx + ay) = 0$$

Donde $bx - ay = 0$, $bx + ay = 0$

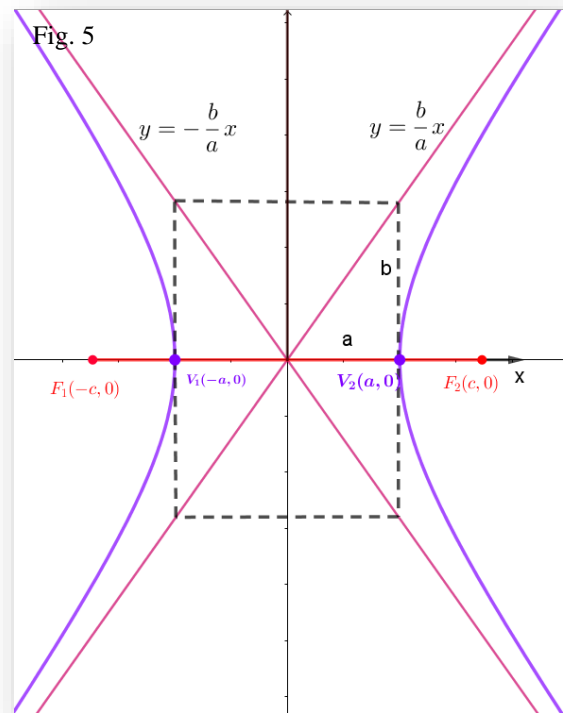
son las ecuaciones de las asíntotas.

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Si el eje real fuera el eje y, se iguala a cero el lado derecho y luego al factorizar nos quedaría

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

Las asíntotas son muy útiles para dibujar una hipérbola. Por ejemplo, si tomamos el eje real $2a$ y el eje imaginario $2b$, podemos construir un rectángulo cuyo centro es el de la hipérbola y cuyos lados son $2a$ y $2b$ paralelos a los ejes real e imaginario. Las diagonales de este rectángulo tienen pendientes $\pm \frac{b}{a}$, de esta manera, cuando son prolongadas, se convierten en las asíntotas de la hipérbola (fig. 5)



Halla las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas, la longitud del lado recto y la excentricidad de la siguiente hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$

Solución: dividiendo ambos miembros por 144

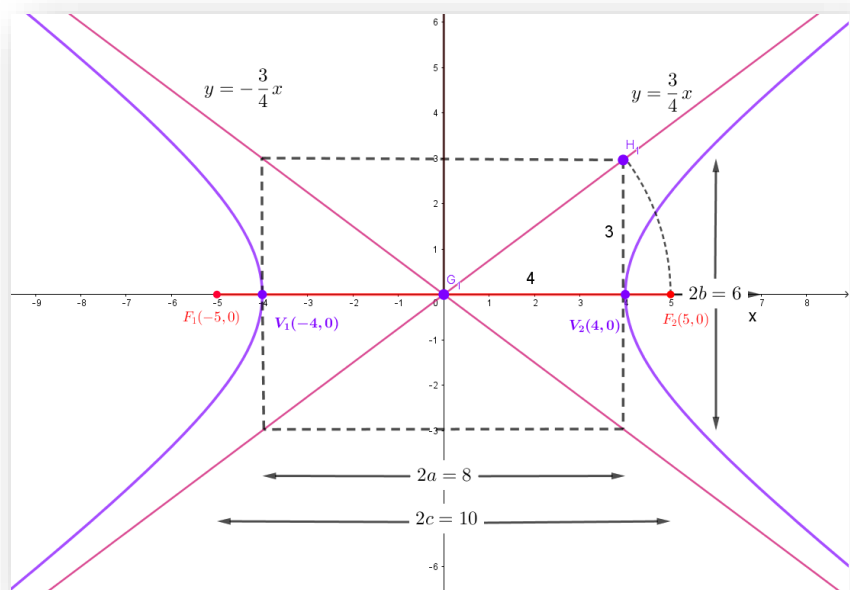
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow 2a = 8 \text{ longitud eje real}$$

$$b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow 2b = 6 \text{ longitud eje imaginario}$$

$$c = \sqrt{16 + 9} = 5 \rightarrow 2c = 10 \text{ distancia focal}$$

Vértice Real
$V_1(-4,0), V_2(4,0)$
Vértice imaginario
$B_1(0,-3), B_2(0,3)$
Focos
$F_1(-5,0), F_2(5,0)$
Asíntotas
$y = \pm \frac{3}{4}x$
$e = c/a = 5/4$



Halla las coordenadas de los vértices, de los focos, las ecuaciones de las asíntotas, la longitud del lado recto y la excentricidad de la siguiente hipérbola $49y^2 - 16x^2 = 784$. Grafica

Solución: dividiendo ambos miembros por 784

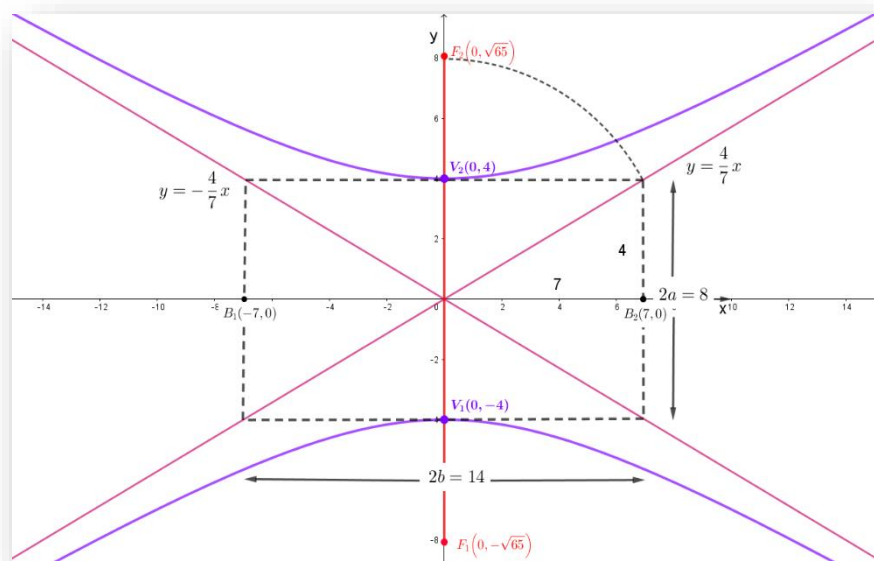
$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow 2a = 8$ longitud eje real

$b^2 = 49 \rightarrow b = 7 \rightarrow 2b = 14$ longitud eje imaginario

$c^2 = 16 + 49 = 65 \rightarrow c = \sqrt{65} \rightarrow 2c = 2\sqrt{65}$ distancia focal

Vértice Real	
$V_1(0, -4), V_2(0, 4)$	
Vértice imaginario	
$B_1(-7, 0), B_2(7, 0)$	
Focos	
$F_1(0, -\sqrt{65}), F_2(0, \sqrt{65})$	
Asíntotas	
$y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{4}{7}x$	
$e = c/a = \sqrt{65}/4$	



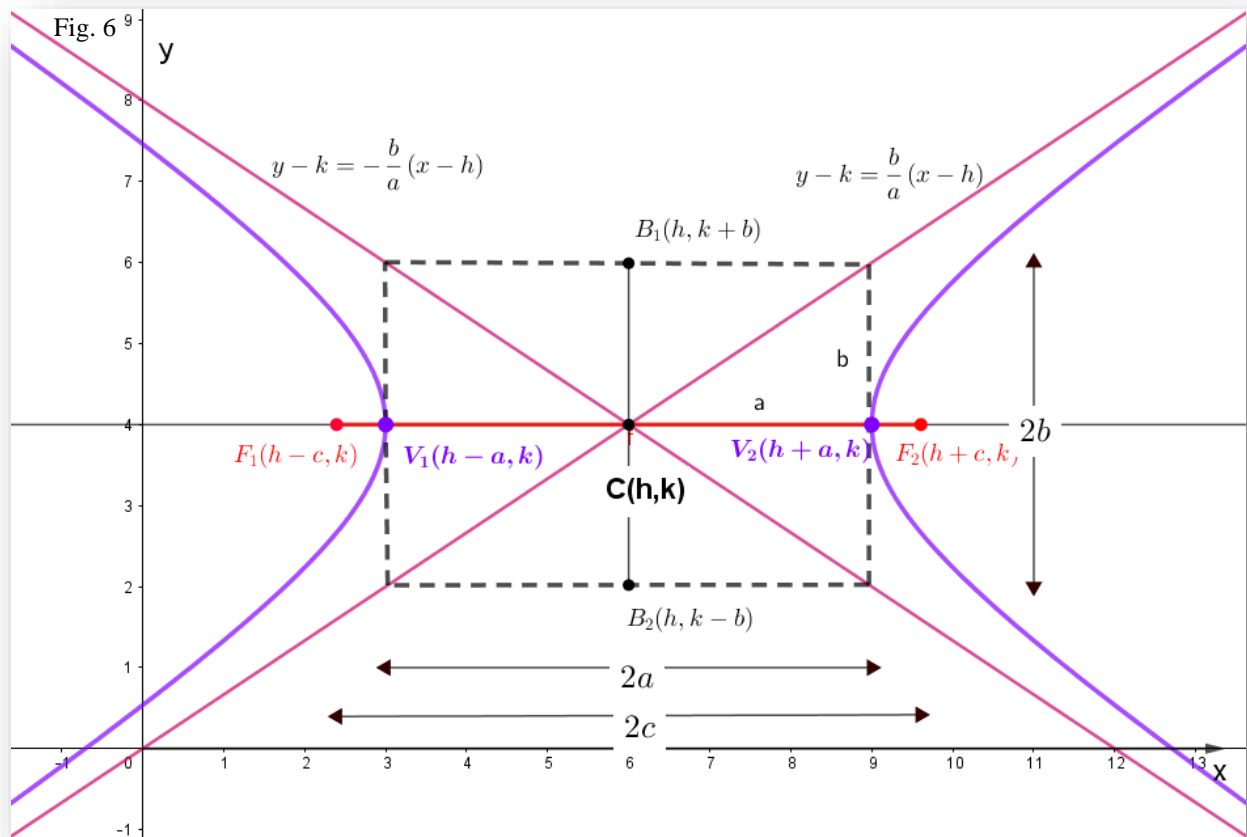
ECUACIÓN CANÓNICA CON CENTRO $C(h, k)$ Y EJE PRINCIPAL PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS.

Si el eje principal de una hipérbola es paralelo al eje x y su centro es $C(h, k)$; su ecuación resulta:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Siendo:(ver fig.6)

Vértices reales	Vértices imaginarios	Focos	Asíntotas	Lado recto	Excentricidad
$V_1(h - a, k)$ $V_2(h + a, k)$	$B_1(h, k - b)$ $B_2(h, k + b)$	$F_1(h - c, k)$ $F_2(h + c, k)$	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	$2 \frac{b^2}{a}$	$e = \frac{c}{a}$



Si desarrollamos los cuadrados de la ecuación canónica con $C(h, k)$ obtenemos la ECUACIÓN GENERAL

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde el signo $A \neq$ signo C

La ecuación de la hipérbola en su forma general puede reducirse a su forma canónica completando cuadrados

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F_1(-5, 2)$ y $F_2(3, 2)$ sea igual a 6

Solución: este ejercicio se puede resolver de dos maneras distintas, veamos una de ellas planteando la definición de lugar geométrico

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 6 \text{ elevando al cuadrado ambos miembros}$$

$$\left(\sqrt{(x+5)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(6 + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados y simplificando

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 36 + 12\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$

Agrupando y elevando nuevamente al cuadrado

$$(16x - 20)^2 = (12\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2})^2 \text{ dividiendo por 4 ambos miembros}$$

$$(4x - 5)^2 = (3\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2})^2 \text{ desarrollando el binomio}$$

$$16x^2 - 40x + 25 = 9x^2 - 54x + 81 + 9y^2 - 36y + 36$$

$$7x^2 + 14x - 9y^2 + 36y = 92 \text{ completando cuadrados}$$

$$7(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 92$$

$$7(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 63$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow 2a = 6 \text{ longitud eje real}$$

$$b^2 = 7 \rightarrow b = \sqrt{7} \rightarrow 2b = 2\sqrt{7} \text{ longitud eje imaginario}$$

$$c^2 = 9 + 7 = 16 \rightarrow c = \sqrt{16} = 4 \rightarrow 2c = 8 \text{ distancia focal}$$

Vértice Real

$$V_1(-4,2)$$

$$V_2(2,2)$$

Vértice imaginario

$$B_1(-1, 2 - 2\sqrt{7})$$

$$B_2(-1, 2 + 2\sqrt{7})$$

Focos

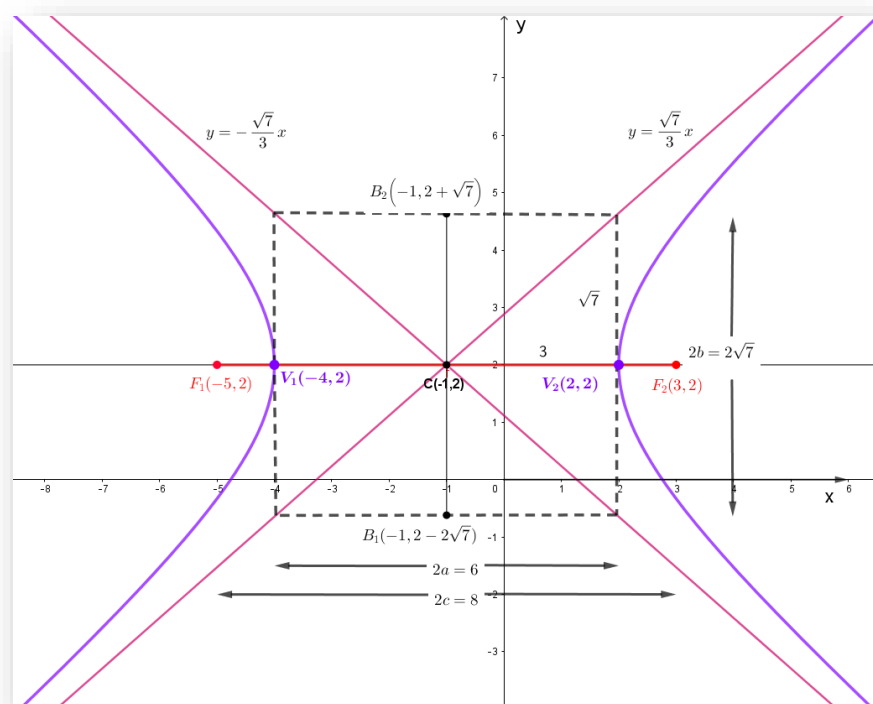
$$F_1(-5,2)$$

$$F_2(3,2)$$

Asíntotas

$$y - 2 = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}(x + 1)$$

$$e = c/a = 4/3$$



Otra posibilidad es trabajar con los elementos de la hipérbola

$$F_1(-5,2) \text{ y } F_2(3,2) \text{ dados los focos la distancia focal será } 2c = 8 \rightarrow c = 4 ; 2a = 6 \rightarrow a = 3$$

$$\text{si } c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = 16 - 9 = 7$$

En el punto medio de los focos se encuentra el centro C de la hipérbola

Dada la ecuación $9x^2 - 16y^2 - 54x - 160y - 463 = 0$ decidir si representa una hipérbola o un par de rectas

Solución: Completando cuadrados se tiene:

$$9(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) - 16(y^2 + 10y + 5^2 - 5^2) - 463 = 0$$

$$9(x - 3)^2 - 16(y + 5)^2 = 81 - 400 + 463$$

$$9(x - 3)^2 - 16(y + 5)^2 = 144$$

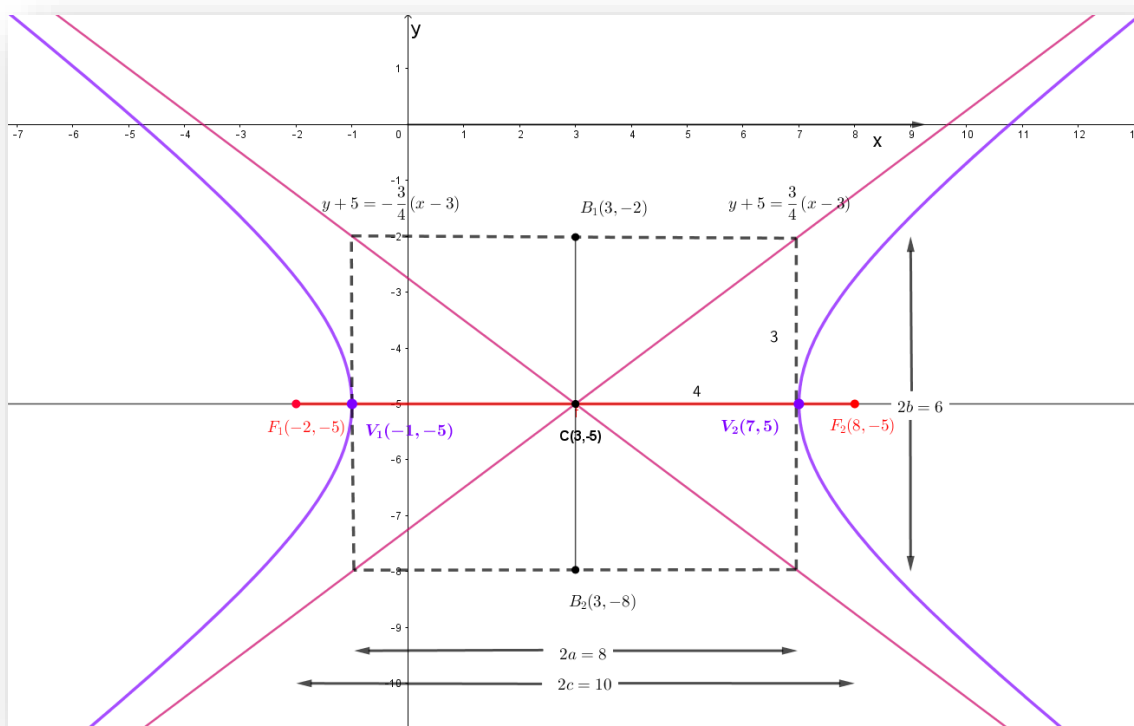
$$\frac{(x - 3)^2}{16} - \frac{(y + 5)^2}{9} = 1$$

Es un hipérbola con eje real paralelo al eje x, con centro $C(3, -5)$

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow 2a = 8 \text{ longitud eje real}$$

$$b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow 2b = 6 \text{ longitud eje imaginario}$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25 \rightarrow c = \sqrt{25} = 5 \rightarrow 2c = 10 \text{ distancia focal}$$



Vértice Real	Vértice imaginario	Focos	Asíntotas	Excentricidad
$V_1(-1, -5)$ $V_2(7, -5)$	$B_1(3, -8)$ $B_2(3, -2)$	$F_1(-2, -5)$, $F_2(8, 5)$	$y + 5 = \pm \frac{3}{4}(x - 3)$	$e = c/a = 5/4$

Dispones de éste tema en versión online

<https://www.loom.com/share/2e1ff516e55d490097edf0d132d6739a>

TRABAJO PRÁCTICO LA HIPERBOLA

1. Para cada una de las siguientes hipérbolas, cuyas ecuaciones son:
 - a. $9x^2 - 4y^2 = 36$ b) $x^2 - 4y^2 = 4$, obtén:
 - i. coordenadas de centro, foco y vértices
 - ii. longitud de los ejes real e imaginario
 - iii. ecuaciones de las asíntotas.
 - iv. excentricidad y longitud de los lados rectos y además representar gráficamente
2. Halla en cada caso la ecuación de la hipérbola sabiendo que:
 - a. los extremos del eje imaginario son $(0,3)$; $(0,-3)$ y la longitud del lado recto es 6.
 - b. pasa por los puntos $(3,-2)$; $(7,6)$, tiene su centro en el origen y el real sobre el eje x
 - c. con $C(0,0)$; un vértice en $(6,0)$ y una de sus asíntotas es la recta $4x - 3y = 0$
 - d. $e = \sqrt{5}$, focos en el eje x, centro en el origen y pasa por $(3,2)$
3. Obtén la ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas y grafica
 - a. Centro en $(-1,4)$, $F(-1,2)$, $V = (-1,3)$
 - b. Asíntotas $(2x - y = 0)$ y $(2x + y = 0)$ pasa por $(3,2)$
 - c. Centro en $(-1,4)$, $F(-1,2)$, $V = (-1,3)$
 - d. Sabiendo que el eje y es el eje focal de una hipérbola, determinar su ecuación sabiendo que $P(2,-2)$ pertenece a la hipérbola y una de sus asíntotas es $x + 2y = 0$.
5. Utilizando la definición de hipérbola, halla la ecuación de dicha curva sabiendo que tiene focos en $(-7,3)$ y $(-1,3)$ y longitud del eje real igual a 4.
6. Para la siguiente hipérbola, cuya ecuación es $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$, obtén:
 - a. coordenadas de centro, foco y vértices.
 - b. longitud de los ejes transversos y conjugado.
 - c. ecuaciones de las asíntotas.
 - d. excentricidad y longitud de los lados rectos y además representa gráficamente
7. Dada la ecuación $4x^2 - 8x - y^2 + 2y + k = 0$, encuentra analíticamente para que valores de "k" la ecuación representa:
 - a. una hipérbola de eje real paralelo al eje "x".
 - b. una hipérbola de eje real paralelo al eje "y".
 - c. que determina la ecuación para $k = -3$?
8. Dadas las siguientes ecuaciones de hipérbolas, llévalas a la forma canónica, halla todos sus elementos. Grafica.
 - a. $-x^2 + 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$
 - b. $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$
 - c. $3x^2 - 3y^2 + 4 = 4$

9. Demuestra que la diferencia de distancias del punto $\left(6, 3\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ a los focos es igual a la longitud del eje real. Estas distancias son los radios focales del punto.

10. Clasifica las distintas ecuaciones para los distintos valores de k

$$a) \frac{x^2}{6+2k} - \frac{y^2}{k+5}$$

$$b) 4(8-k)x^2 + ky^2 = 8k - k^2$$

11. Analiza la ecuación $(h-k)x^2 + (h-m)y^2 = 1$ en cada uno de los siguientes casos:

$$a) k > h > m$$

$$b) m > h > k$$

$$c) h > k > m$$

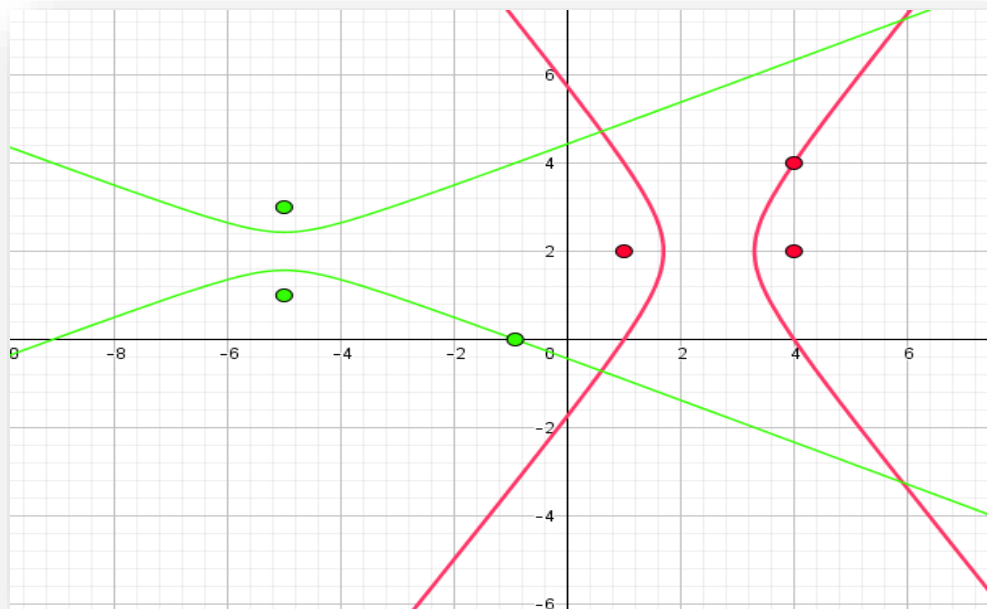
12. Obtén todos los valores de k sabiendo que el eje focal de la hipérbola:

a. $k(k-1)x^2 + (k+1)y^2 = 1$ es paralelo al eje de las abscisas

b. $x^2 - ky^2 - 6x + 2ky + 1 = 0$ es paralelo al eje de las abscisas y el eje transversal mide 4

c. $-4x^2 + y^2 - 16x + k = 0$ es paralelo al eje de las ordenadas y el eje transversal mide 8.

13. Deduce las ecuaciones de las hipérbolas e indica sus elementos



PARABOLA

DEFINICION: Dados en el plano una recta fija, llamada directriz y un punto fijo, llamado foco, no perteneciente a ella, se define la parábola como los puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz

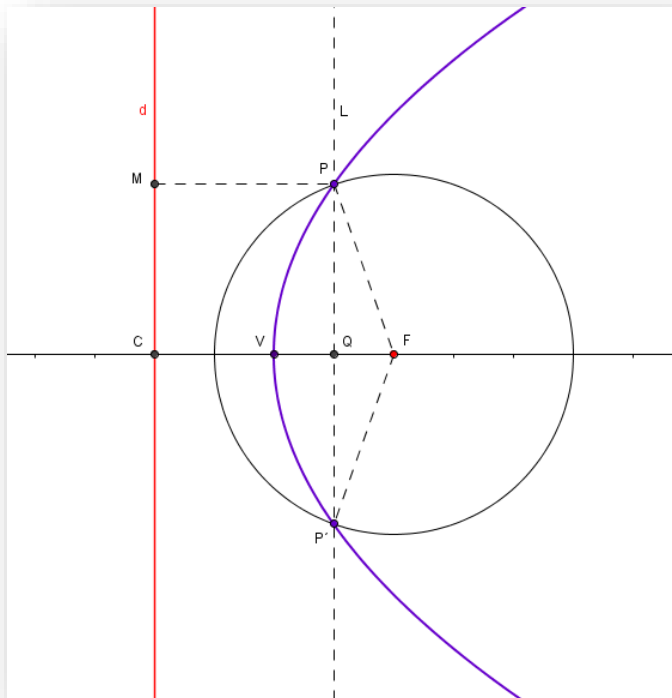
$$\mathcal{P} = \{P: d(P, F) = d(P, d)\}$$

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA:

- ✓ F: foco
- ✓ Eje de simetría: recta que contiene al foco y es perpendicular a la recta directriz
- ✓ d : recta directriz
- ✓ V: vértice - punto medio entre el foco y la recta directriz
- ✓ p : parámetro de la parábola (distancia al vértice del foco o de la recta directriz)
- ✓ LR: lado recto cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría

CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA

Para construir una parábola, supongamos que F es el foco y d la recta directriz, trazamos por F una recta que contiene al foco y es perpendicular a la recta directriz en C, en el punto medio del segmento \overline{CF} se encuentra el vértice V de la parábola. Para construir otros puntos trazamos una recta paralela a la recta directriz que pase por un punto Q del segmento \overline{CF} y esté a la derecha de V, a continuación, con centro en F dibujamos una circunferencia de radio \overline{CQ} , que intercepta a la recta en dos puntos P y P' $r = \overline{FP} = \overline{CQ} = \overline{MP}$, el punto P es equidistante del foco y de la recta directriz, en consecuencia, $P \in$ a la parábola.



ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARABOLA

Para deducir una forma sencilla la ecuación de la parábola, usaremos como eje de simetría coincidente con uno de los ejes coordenados y como vértice el origen de coordenadas. El vértice estará por lo tanto en el punto medio entre el foco y la recta directriz.

Con vértice en el origen, eje focal el eje x

$$d(P, F) = d(P, d)$$

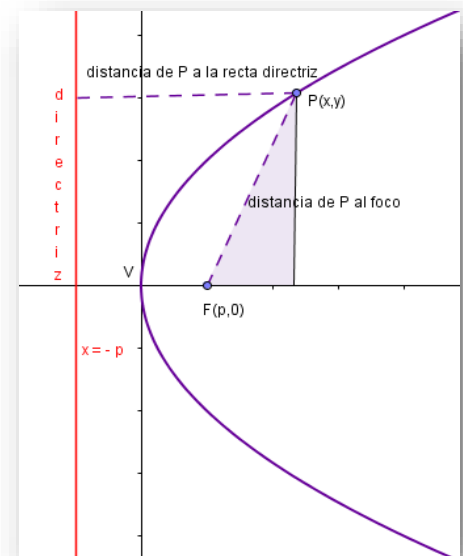
$$\sqrt{(x - p)^2 + (y)^2} = x + p$$

$$(\sqrt{(x - p)^2 + (y)^2})^2 = (x + p)^2$$

$$(x - p)^2 + (y)^2 = (x + p)^2 \text{ desarrollando cuadrados}$$

$$\cancel{x^2} - 2xp + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2xp + \cancel{p^2}$$

$$y^2 = 4px$$



Propiedades de la parábola con C(0,0), eje focal x

- Simetría:** $F(x, y) = F(x, -y) \rightarrow$ la parábola es simétrica respecto del eje x a igual valor de x se obtienen dos valores de y
- Valores excluidos:** $F(x, y) \neq F(-x, -y) \rightarrow$ la parábola No es simétrica respecto del origen de coordenadas
- Relaciones geométricas**
 - ✓ Pasa por el origen de coordenadas si $x = 0 \Rightarrow y = 0$ por lo tanto $O(0,0) \in P$.
 - ✓ El coeficiente que multiplica a la variable x se denomina Lado recto $LR = 4p$
 - ✓ Si $p > 0 \Rightarrow x > 0 \leftrightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia la derecha.
 - ✓ Si $p < 0 \Rightarrow x < 0 \leftrightarrow$ las ramas de la parábola se abren hacia la izquierda.

Deduce de acuerdo a la definición la ecuación de la parábola de $F(3,0)$; d: $x = -3$

Solución: $d(P, F) = d(P, d)$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y)^2} = x + 3$$

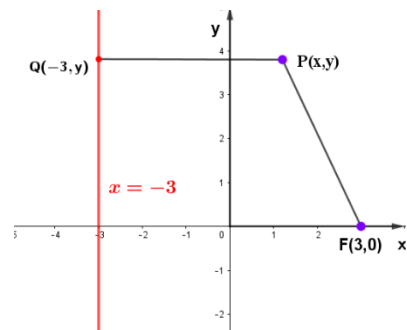
Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{(x - 3)^2 + (y)^2})^2 = (x + 3)^2$$

$$(x - 3)^2 + (y)^2 = (x + 3)^2 \text{ desarrollando cuadrados}$$

$$\cancel{x^2} - 6x + \cancel{9} + y^2 = \cancel{x^2} + 6x + \cancel{9}$$

$$y^2 = 12x$$



Propuesto 1: justifica analíticamente por qué el lado recto (LR) es igual a $4p$

Propuesto 2: comprueba que, si el eje de simetría es el eje “x”, el vértice es el origen, y el F está a la izquierda de V, entonces la ecuación de la parábola es $y^2 = -4px$

Con vértice en el origen, eje focal el eje y

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y - p)^2} = y + p$$

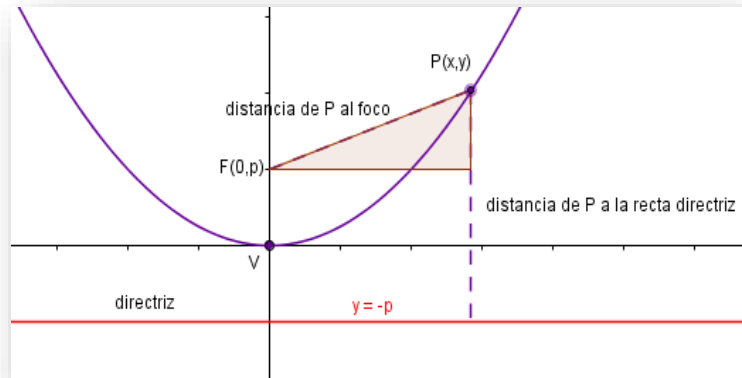
$$(\sqrt{(x)^2 + (y - p)^2})^2 = (y + p)^2$$

$$(x)^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

desarrollando cuadrados

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2yp + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} + 2yp + \cancel{p^2}$$

$$x^2 = 4py$$

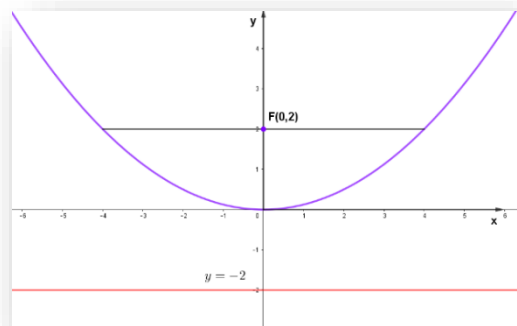


Propiedades de la parábola con Centro (0,0) y eje focal eje y

- Simetría:** $F(x, y) = F(-x, y) \rightarrow$ la parábola es simétrica respecto del eje y, a igual valor de y se obtienen dos valores de x
- Valores excluidos:** $F(x, y) \neq F(-x, -y) \rightarrow$ la parábola No es simétrica respecto del origen de coordenadas
- Relaciones geométricas**
 - ✓ Pasa por el origen de coordenadas si $y = 0 \rightarrow x = 0$ por lo tanto $O(0,0) \in P$
 - ✓ El coeficiente que multiplica a la variable y se denomina Lado recto $LR = 4p$
 - ✓ Si $p > 0 \rightarrow y > 0 \rightarrow \text{Im} = \mathbb{R}^+$ (las ramas de la parábola se abren hacia arriba)
 - ✓ Si $p < 0 \rightarrow x < 0 \rightarrow \text{Im} = \mathbb{R}^-$ (las ramas de la parábola se abren hacia abajo)

Caracterizar la siguiente parábola $x^2 = 8y$

- ✓ pasa por el origen $y = 0 ; x = 0$
- ✓ para $y = 2 ; x = \pm 4$, por lo tanto es simétrica respecto del eje y
- ✓ $LR = 8 = 4p \rightarrow p = 2$ luego las coordenadas de $F(0,2)$
- ✓ la directriz está por debajo del foco $y = -2$
- ✓ el vértice se encuentra en el punto medio del segmento entre el F y la recta $d \rightarrow V(0,0)$
- ✓ despejando x, se tiene $x = \sqrt{8y}$, dominio $y > 0$, por lo tanto las ramas de la parábola se abren hacia arriba, el campo de variación de x son todos los reales



Propuesto 3: justifica por qué el Lado Recto es igual a 4p

Propuesto 4: comprueba que si el eje principal es el eje “y”, el vértice es el origen, y el F está por debajo de O, entonces la ecuación de la parábola es $x^2 = -4py$

ECUACIÓN CANÓNICA CON VÉRTICE $V(h, k)$, EJE FOCAL PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

- Con vértice (h, k) paralela al eje x

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2} = (x - h + p)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2})^2 = (x - h + p)^2$$

desarrollando los binomios al cuadrado

$$\cancel{x^2} - 2\cancel{x}h - 2xp + \cancel{h^2} + 2hp + \cancel{p^2} + (y - k)^2 = \cancel{x^2} - 2\cancel{x}h + 2xp + \cancel{h^2} - 2hp + \cancel{p^2}$$

$$(y - k)^2 = 4xp - 4hp$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

desarrollando cuadrados e igualando a cero

$$y^2 - 4px - 2ky + 4ph + k^2 = 0$$

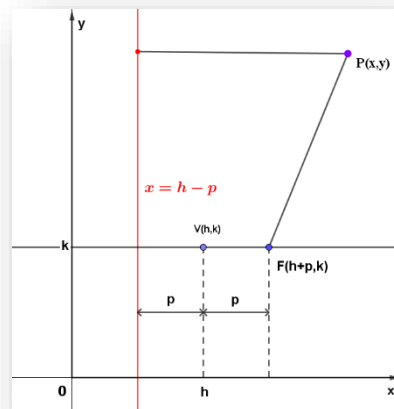
si comparamos esta ecuación con la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

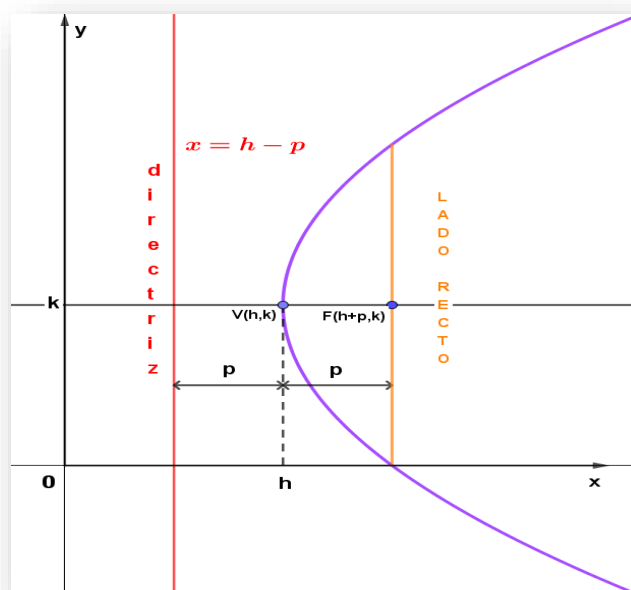
se puede observar que:

- ✓ carece de término rectangular $B = 0$
- ✓ uno de los coeficientes cuadráticos es nulo, $A = 0$ y el otro no, es decir es de la forma

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$



Vértice	$V(h, k)$
Eje de simetría	$y = k$
Foco	$F(h + p, k)$
Directriz	$x = h - p$
Lado Recto	$4p$



Observación: no toda ecuación como $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola, ya que si llevamos a la forma canónica podemos analizar las siguientes situaciones:

- ✓ para que represente una parábola $D \neq 0$
- ✓ si $D = 0$ representa un par de rectas o no existe lugar geométrico

Obtén la ecuación de la parábola con vértice $(2, -3)$ y directriz $x = 4$. Determina el foco

y el lado recto (LR)

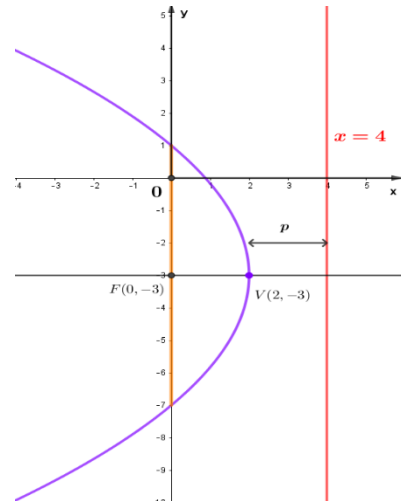
Solución: se sabe que $h = 2$ y $k = -3$. Como su directriz es $x = \text{constante}$, la ecuación será de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. La distancia del vértice a la recta directriz nos dará el valor de p , en el gráfico se puede ver que $|p| = 2$. Por otra parte, $p = -2$ porque la curva se abre hacia la izquierda.

Esto se deduce también resolviendo $(h + p) = 4$

$$(y + 3)^2 = 4(-2)(x - 2)$$

$$(y + 3)^2 = -8(x - 2)$$

El foco es $(0, -3)$ y el LR = 8



• Con vértice (h, k) , paralela al eje y

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + [y - (k + p)]^2} = (y - k + p)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{(x - h)^2 + [y - (k + p)]^2})^2 = (y - k + p)^2$$

desarrollando los binomios al cuadrado

$$(x - h)^2 + \cancel{y^2} - 2\cancel{y}k - 2yp + \cancel{k^2} + 2kp + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} - 2\cancel{y}k + 2yp + \cancel{k^2} - 2kp + \cancel{p^2}$$

$$(x - h)^2 = 4yp - 4kp$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

desarrollando cuadrados

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk \text{ ordenando e igualando a cero}$$

$$x^2 - 2hx - 4py + 4pk + h^2 = 0$$

si comparamos esta ecuación con la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se puede observar que:

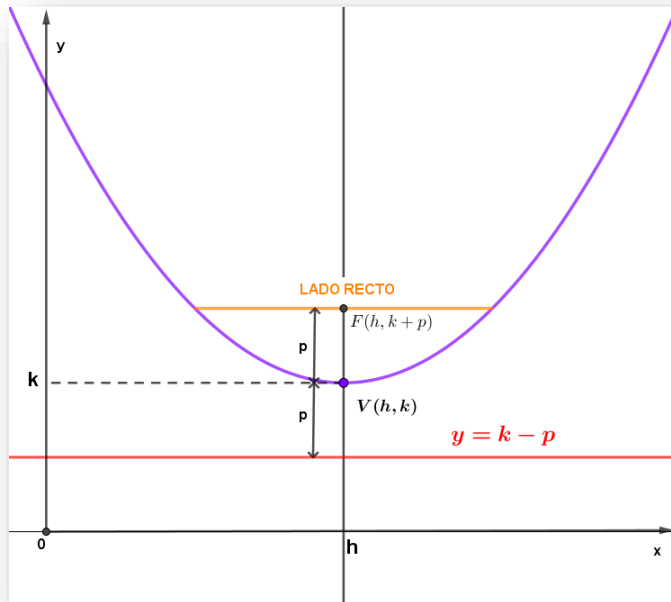
- ✓ carece de término rectangular $B = 0$

- ✓ uno de los coeficientes cuadráticos es nulo $C = 0$ y el otro no, es decir es de la forma

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

completando cuadrados en x se lleva a la forma la forma canónica y se obtienen los elementos

Vértice
$V(h, k)$
Eje de simetría
$x = h$
Foco
$F(h, k + p)$
Directriz
$y = k - p$
Lado Recto
$4p$



Halla el vértice, el eje de simetría, el foco, la directriz, lado recto y la gráfica de la parábola cuya ecuación es $x^2 - 8x = 4y - 8$

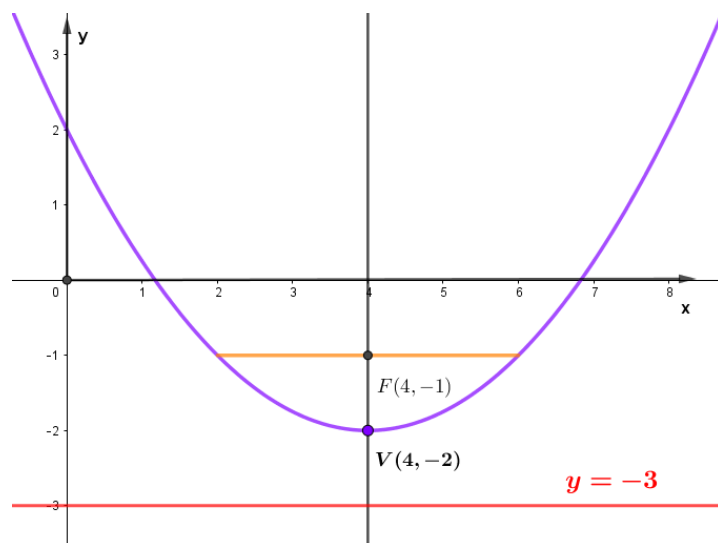
Solución: completando cuadrado en x , resulta

$$x^2 - 8x + 16 - 16 = 4y - 8$$

$$(x - 4)^2 = 4y + 8$$

$$(x - 4)^2 = 4(y + 2)$$

Vértice
$V(4, -2)$
Eje de simetría
$x = 4$
Foco
$F(4, -2 + 1)$
Directriz
$y = -3$
Lado Recto
4



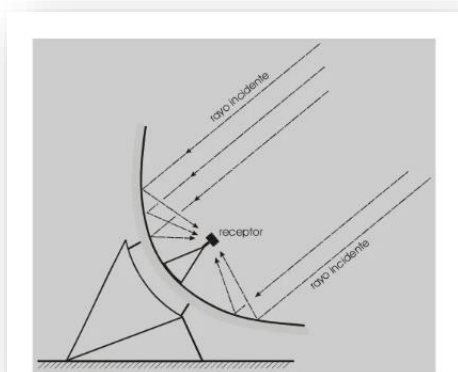
Observación: no toda ecuación como la siguiente $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola, pues si llevamos a la forma podemos analizar las siguientes situaciones

- ✓ $E \neq 0$ para que represente una parábola
- ✓ si $E = 0$ representa un par de rectas o no existe lugar geométrico

IMPORTANCIA DEL TEMA

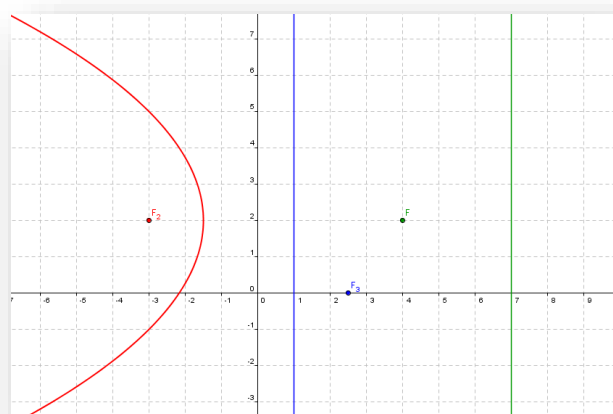
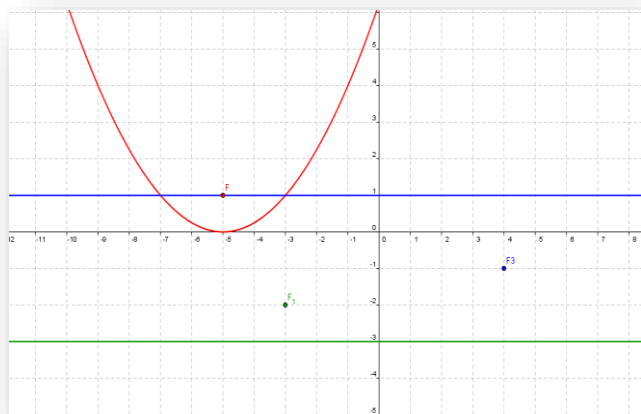
El diseño de objetos como reflectores, antenas parabólicas, faros de automóvil, telescopios de reflexión, se basan en una propiedad muy conveniente de la parábola. Si al espejo de un telescopio de reflexión de forma parabólica, llegan rayos de luz paralelos, de una estrella lejana se puede demostrar que entonces todos los rayos se reflejarán dirigiéndose al foco.

Si una fuente luminosa se coloca en el foco de una superficie parabólica reflectora, entonces se producirá un haz de rayos paralelos al eje de simetría de la parábola. Un caso muy típico son los reflectores de luz: estos tienen su filamento exactamente en la posición del foco con lo que se consigue que casi todos los rayos luminosos salgan en dirección paralela al eje focal, lográndose una iluminación más concentrada



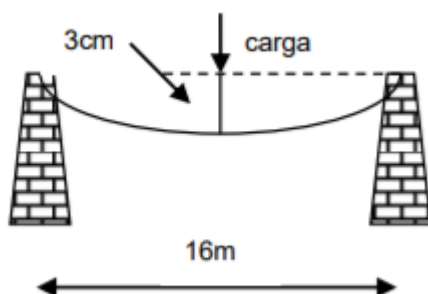
Los rayos que llegan a la antena parabólica por provenir de distancias muy grandes prácticamente llegan en dirección paralela al eje focal. Al reflejarse, todos los rayos reflejados van hacia el foco, en donde se coloca el receptor y de esta manera capta más cantidad de ondas

Propuesto 5: a partir de los datos escribe la ecuación de la parábola



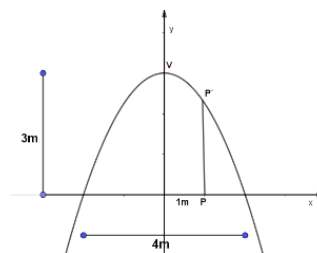
TRABAJO PRÁCTICO LA PARABOLA

- En los siguientes ejercicios es necesario formar la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas, conociendo que:
 - las coordenadas del foco son: a) $(4,0)$; b) $(0,3)$.
 - la ecuación de la directriz es: a) $x = 1$; b) $y = 2$.
 - la parábola es simétrica al eje Ox y pasa por $(1, -2)$.
 - la parábola es simétrica al eje Oy y pasa por $(2, -3)$.
- El vértice de una parábola de eje paralelo al eje x es $V(3,1)$. El punto $(-1, -2)$ pertenece a la parábola. Halla la ecuación de la curva y sus elementos.
- Halla las ecuaciones de todas las parábolas que pasan por el punto $(5,6)$, tienen como directriz $y = 1$ y como eje $x = 2$.
- Halla la ecuación de la parábola sabiendo que su vértice es $V(1, -2)$ y su foco es $F(4 - 2)$.
- Hállese en la parábola $y^2 = 4x$ un punto para el cual la distancia de él al foco es igual a 10.
- Obtén una ecuación de la recta tangente a la parábola cuya ecuación es $y^2 = -4x$ en el punto $(-4,4)$.
- Halla la ecuación de una cuerda común para la parábola $y^2 = 18x$ y la circunferencia $(x + 6)^2 + y^2 = 100$
- Un faro de automóvil tiene un reflector parabólico de 6 pulgadas de diámetro y 3 pulgadas de profundidad. ¿A qué distancia del vértice debe colocarse el bulbo luminoso?
- Una viga de 16 metros de largo con soportes simples sostiene una carga concentrada en su centro. La deformación de la viga en su centro es de 3 cm. Suponga que la viga deformada es parabólica.
 - Halla una ecuación de la parábola.
 - ¿A qué distancia del centro de la viga se produce una deformación de 1cm?



- Se lanza una pelota hacia arriba desde el balcón de un edificio de 15m. Llega al punto más alto de su trayectoria a 6m sobre el balcón y a 3m fuera del edificio. ¿A qué distancia del edificio cae la pelota al piso?

11. El siguiente dibujo representa un arco de parábola, y con la información dada, hallar la ecuación de la misma, y la altura del soporte $\overline{PP'}$.



12. La distancia entre dos soportes verticales de un puente colgante es de 100m. y la flecha del cable es de 15m.

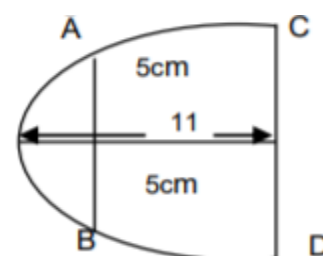
a. Si el cable tiene forma de parábola, obtenga su ecuación. Supón que el vértice está en el punto medio (el más bajo) del cable.

b. ¿Cuál es la altura del cable a 30mts del centro?

13. En la figura anexa se representa el corte longitudinal de un reflector parabólico. El bombillo se coloca en el foco, donde la cuerda mide 10 cm

a. Deduce una ecuación de una parábola

b. Calcula el diámetro de la abertura CD, a 11 cm del vértice.



14. El espejo parabólico del refractor de un observatorio tiene una distancia focal de 20m y un diámetro de 6m. Halla la profundidad de la cavidad parabólica que fue necesario hacer al construir este espejo de un cristal plano.

15. Determina las coordenadas del vértice, la magnitud del parámetro y la dirección del eje de simetría de las siguientes parábolas:

a. $y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$

b. $y = 2x - x^2$

c. $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$

d. $y = -x^2 + x + 6$

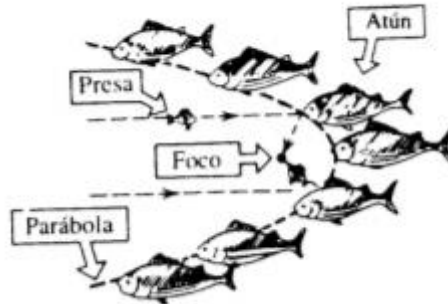
e. $2x^2 - y + 4x + 5 = 0$

16. Deduce la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la distancia a un punto $F(8; 2)$ es igual a su distancia a la recta de ecuación $x - 5 = 0$

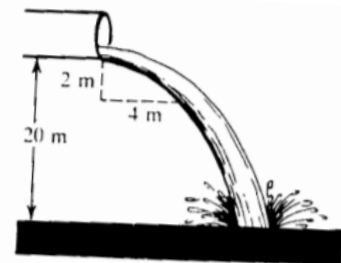
17. Supón que el rayo de luz que emana del foco de la parábola $y^2 = 4x$ se encuentra con la parábola en $(1, -2)$. ¿Cuál es la ecuación del rayo reflejado?

18. El atún, cuyas presas son los peces más chicos, se observa nadando en grupos de 10 o 20, distribuidos en una forma aproximadamente parabólica. Una posible explicación para que esto ocurra

es que el pez más chico trata de escapar de la parábola por reflexión. Como resultado, los peces chicos se concentran en el foco. Poniendo a este problema en un sistema de referencia, halla el foco de una parábola de vértice $A(6;3)$ y directriz $x - 8 = 0$



19. Supón que el chorro de agua del extremo de un tubo horizontal sigue un arco parabólico con vértice en el extremo del tubo. El tubo está a una altura de 20m de la tierra. En un punto a 2m por debajo del final del tubo, la distancia horizontal del agua hasta la línea vertical del final del tubo es de 4 metros. ¿Dónde golpea el agua la tierra?



20. Disponemos de 120m de cerca para delimitar un terreno rectangular, y podemos elegir las dimensiones del terreno. ¿Qué medidas deberíamos escoger para que el terreno sea lo más grande posible?

AUTOEVALUACION

¿Puedes...

- ☐ determinar el eje de simetría y el sentido de la curva, dada la ecuación de la parábola?
- ☐ escribir la ecuación de la directriz, hallar los extremos y la longitud del lado recto?
- ☐ dibujar la parábola dada su ecuación
- ☐ hallar la ecuación de una parábola dado su foco y la recta directriz?
- ☐ reducir a la forma canónica y hallar los elementos?

CUADRICAS

DEFINICIÓN

Una cuádrica se define como el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0 \quad (1)$$

Debido a que la superficie no está rotada no aparecen los sumandos mixtos xy , xz e yz . La ecuación puede reducirse completando cuadrados, a una ecuación más simple, denominada forma canónica,

$$(x - h)^2 + (y - j)^2 + (z - k)^2 + g = 0 \quad (2)$$

Donde los sustraendos de los términos cuadráticos corresponden a las coordenadas del centro de la superficie $C(h, j, k)$

Las superficies cuádricas pueden ser con centro de simetría y sin centro de simetría.

FORMAS REDUCIDAS las formas reducidas de la ecuación de una cuádrica son:

- Con centro de simetría $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + G = 0$ ya que, para valores opuestos de las variables, la superficie resulta simétrica con respecto al origen de coordenadas

La forma canónica de esta ecuación la podemos expresar como:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Sin centro de simetría $Ax^2 + By^2 + Cz = 0$

La forma canónica de esta ecuación se puede expresar como:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$$

SUPERFICIES DE REVOLUCION

Es la superficie generada por la rotación de una curva plana (directriz) en torno a una recta perteneciente al plano de la curva (eje de rotación).

Al seccionar la superficie de revolución con planos perpendiculares al eje de rotación se obtienen circunferencias.

La ecuación $x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ corresponde a una superficie de revolución ya que los términos en x e y son iguales y si seccionamos con planos paralelos al plano xy , ($z = k$) obtenemos

$$x^2 + y^2 = 2k^2 + 1$$

$\forall k \in \mathcal{R}$ circunferencias que aumentan de radio a medida que aumenta k en valor absoluto, la superficie es de revolución y su eje es perpendicular al plano xy .

Para hallar la curva generatriz, se halla la intersección de la superficie con el plano zy por ejemplo

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{si } x = 0 \rightarrow y^2 - 2z^2 = 1$$

Hipérbola de eje focal y .

PROCEDIMIENTO PARA ANALIZAR UNA SUPERFICIE

Para graficar una superficie $F(x, y, z) = 0$, es conveniente realizar previamente un análisis de su ecuación. Para ello realizaremos lo siguiente:

1. Intersección con los ejes coordenados

Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ F(x, 0, 0) = 0 \rightarrow P_x(x, 0, 0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ F(0, y, 0) = 0 \rightarrow P_y(0, y, 0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ F(0, 0, z) = 0 \rightarrow P_z(0, 0, z) \end{cases}$

2. Intersección con los planos coordenados

La intersección de una superficie con un plano se llama *traza de la superficie* con ese plano. Éstas trazas se obtienen haciendo en la ecuación canónica $z = 0$ (traza en el plano xy), $y = 0$ (traza en el plano xz) y luego $x = 0$ (traza en el plano yz). Por lo tanto, en la determinación de las trazas se identifican las curvas planas (circunferencia, elipse, hipérbola y parábola o cónicas degeneradas).

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = 0 \\ F(x, y, 0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ F(x, 0, z) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ F(0, y, z) = 0 \end{cases}$

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Como las cuádricas son superficies que se desarrollan en el espacio tridimensional, con el análisis de los puntos anteriores es insuficiente. Las secciones planas determinadas por planos paralelos a los planos coordenados nos permitirán conocer la configuración de la misma en el espacio y para ello los planos paralelos que utilizaremos tendrán la forma, $x = k, y = k, z = k$, que haciendo las sustituciones en la ecuación nos permitirá ir identificando dichas curvas planas.

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = k \\ F(x, y, k) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = k \\ F(x, k, z) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = k \\ F(k, y, z) = 0 \end{cases}$

2. Simetrías

Analizar la simetría de una superficie, implica analizar que sucede con su ecuación cuando se cambia el signo de una, de dos o de tres variables.

Simétrica respecto al plano	
"xy"	$F(x, y, z) = F(x, y, -z) = 0$
"xz"	$F(x, y, z) = F(x, -y, z) = 0$
"yz"	$F(x, y, z) = F(-x, y, z) = 0$
Simétrica respecto al eje	
"x"	$F(x, y, z) = F(x, -y, -z) = 0$
"y"	$F(x, y, z) = F(-x, y, -z) = 0$
"z"	$F(x, y, z) = F(-x, -y, z) = 0$
Simétrica respecto del origen	
	$F(x, y, z) = F(-x, -y, -z) = 0$

ESTUDIO DE CADA SUPERFICIE CUADRICA CON CENTRO C(0,0,0)

ELIPSOIDE

Los tres términos cuadráticos son del mismo signo, siendo $a, b, c \neq 0$. Si a, b y c son iguales la superficie será una **esfera**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Intersección con los ejes coordenados

Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow x = \pm a; P_x(\pm a, 0, 0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \pm b; P_y(0, \pm b, 0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow z = \pm c; P_z(0, 0, \pm c) \end{cases}$

1. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{ellipse} \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{ellipse} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{ellipse} \end{cases}$

2. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \end{cases}$ $1 - \frac{k^2}{c^2} > 0 \rightarrow -c < k < c \text{ ellipse}$ $1 - \frac{k^2}{c^2} = 0 \rightarrow P(0, 0, \pm c)$ $1 - \frac{k^2}{c^2} < 0 \rightarrow \nexists \text{ lugar geométrico}$	$\begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \end{cases}$ $1 - \frac{k^2}{b^2} > 0 \rightarrow -b < k < b \text{ ellipse}$ $1 - \frac{k^2}{b^2} = 0 \rightarrow P(0, \pm b, 0)$ $1 - \frac{k^2}{b^2} < 0 \rightarrow \nexists \text{ LG}$	$\begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \end{cases}$ $1 - \frac{k^2}{a^2} > 0 \rightarrow -a < k < a \text{ ellipse}$ $1 - \frac{k^2}{a^2} = 0 \rightarrow P(\pm a, 0, 0)$ $1 - \frac{k^2}{a^2} < 0 \rightarrow \nexists \text{ LG}$

Analiza y grafica la siguiente superficie:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

1. Intersección con los ejes coordenados

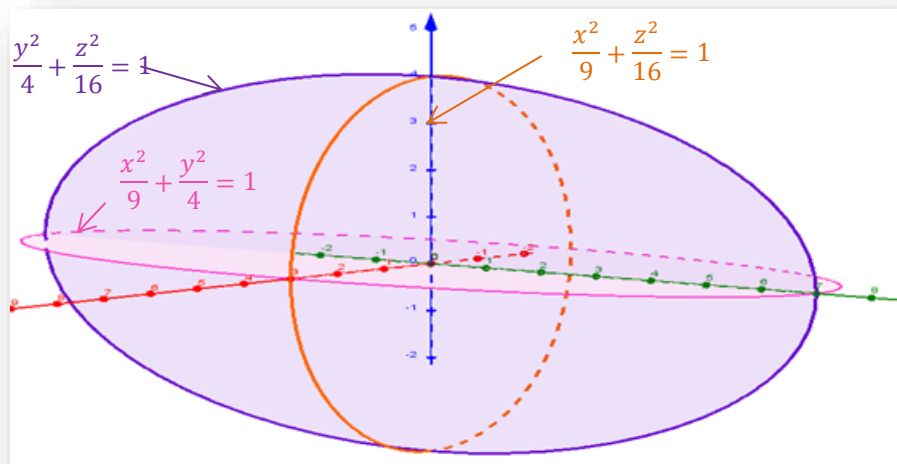
Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x^2}{9} = 1 \rightarrow P_x = \pm 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow z = \pm 4 \end{cases}$

2. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano "x y"	Traza sobre el plano "x z"	Traza sobre el plano "y z"
$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \text{elipse} \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow \text{elipse} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow \text{elipse} \end{cases}$

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "x y"	Traza sobre el plano "x z"	Traza sobre el plano "y z"
$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{16} \end{cases}$ <p> $1 - \frac{k^2}{16} > 0 \rightarrow -4 < k < 4$ elipse $1 - \frac{k^2}{16} = 0 \rightarrow P(0, 0, \pm 4)$ $1 - \frac{k^2}{16} < 0 \rightarrow \nexists \text{ LG}$ </p>	$\begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{4} \end{cases}$ <p> $1 - \frac{k^2}{4} > 0 \rightarrow -2 < k < 2$ elipse $1 - \frac{k^2}{4} = 0 \rightarrow P(0, \pm 2, 0)$ $1 - \frac{k^2}{4} < 0 \rightarrow \nexists \text{ LG}$ </p>	$\begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{k^2}{9} \end{cases}$ <p> $1 - \frac{k^2}{9} > 0 \rightarrow -3 < k < 3$ elipse $1 - \frac{k^2}{9} = 0 \rightarrow P(\pm 3, 0, 0)$ $1 - \frac{k^2}{9} < 0 \rightarrow \nexists \text{ LG}$ </p>

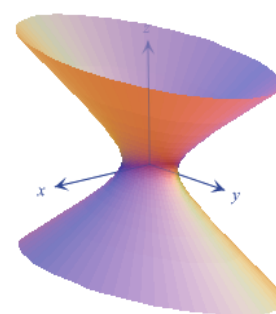


HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Uno de los términos es negativo. El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Si $a = b$ será un hiperboloide de revolución.

Para identificar el hiperboloide de una hoja lo hacemos mediante:



1. Intersección con los ejes coordenados

Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow x = \pm a \\ P_x(\pm a, 0, 0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \pm b \\ P_y(0, \pm b, 0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -\frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{NO CORTA} \end{cases}$

2. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{ellipse} \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{hip} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{hip} \end{cases}$

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \end{cases}$ <p>No importa el valor de k siempre será una ellipse, cada vez mayor</p>	$\begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \end{cases}$ <p>$k < b$ hip eje real x $k = b$ par de rectas $k > b$ hip eje real z</p>	$\begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \end{cases}$ <p>$k < a$ hip eje real y $k = a$ par de rectas $k > a$ hip eje real z</p>

Para graficar esta superficie utilizaremos tres elementos básicos

1. Identificar el eje del hiperboloide (coeficiente negativo)
2. Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio.
3. Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados)

Analiza y grafica

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} - z^2 = 1$$

1. Intersección ejes coordenados

Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x^2}{4} = 1 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{5} = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{5} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -z^2 = 1 \rightarrow \text{NO CORTA} \end{cases}$

2. Intersección con los planos coordenados

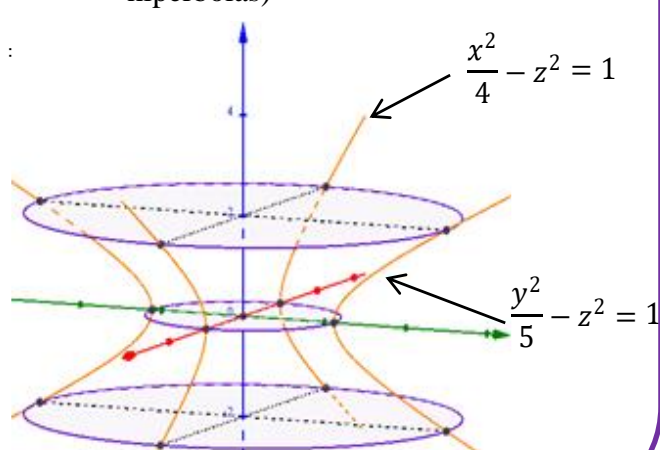
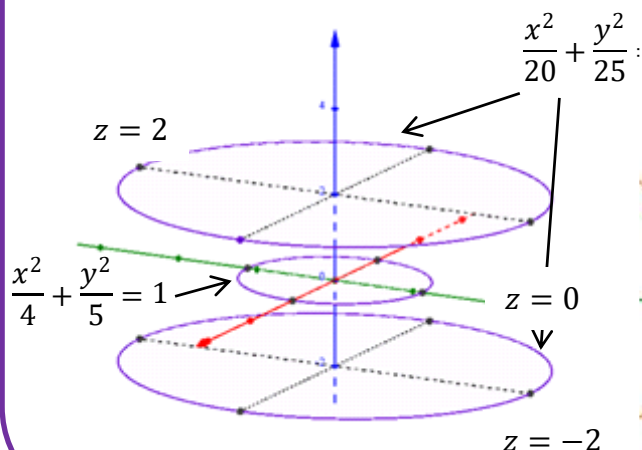
Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \rightarrow \text{elipse} \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{4} - z^2 = 1 \rightarrow \text{hip eje real x} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{5} - z^2 = 1 \rightarrow \text{hip eje real y} \end{cases}$

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = \pm 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 + (\pm 2)^2 \\ 1 + 4 > 0 \rightarrow \text{elipse} \\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{25} = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{4} - z^2 = 1 - \frac{k^2}{5} \\ k < \sqrt{5} \text{ hip eje real x} \\ k = \sqrt{5} \text{ par de rectas} \\ k > \sqrt{5} \text{ hip eje real z} \end{cases}$	$\begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{4} \\ k < 2 \text{ hip eje real y} \\ k = 2 \text{ par de rectas} \\ k > 2 \text{ hip eje real z} \end{cases}$

Para graficar identificaremos:

1. el eje (término negativo), **eje z**;
2. luego trazamos planos perpendiculares al eje del hiperboloide, $z = \pm 2$ graficamos las trazas (elipses)
3. uniendo los puntos que están en los distintos planos coordenados quedan determinadas las dos hipérbolas)

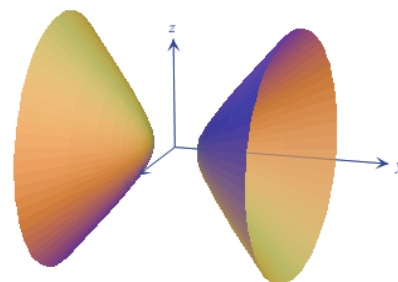


HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS (un solo término positivo)

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo.

Para identificar el hiperboloide de dos hojas lo hacemos mediante:

1. Intersección con los ejes coordenados

Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ -\frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow \text{NO CORTA} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \pm b \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -\frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{NO CORTA} \end{cases}$

2. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = 0 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{hip} \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \nexists \text{LG} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \text{hip} \end{cases}$

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = k \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \end{cases}$ <p>$k \leq a$ hip eje real y</p>	$\begin{cases} y = k \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \end{cases}$ <p>$k < b \nexists \text{LG}$ $k = b \quad P(0, b, 0)$ $k > b$ elipse</p>	$\begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2} \end{cases}$ <p>$k \leq a$ hip eje real y</p>

Para graficar esta superficie cuádrica utilizaremos tres procedimientos básicos:

1. Identificar el eje del hiperboloide de dos hojas (coeficiente positivo).
2. Encontrar la intersección con los ejes coordenados
3. Encontrar las trazas con planos coordenados
4. Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje de simetría del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio.
5. Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados).

Representa gráficamente el hiperboloide de dos hojas, siendo:
 $a = 9$; $b = 4$; $c = -5$; eje de simetría el eje "y"

Solución:

$$-\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$$

Realizando los pasos anteriores concluimos:

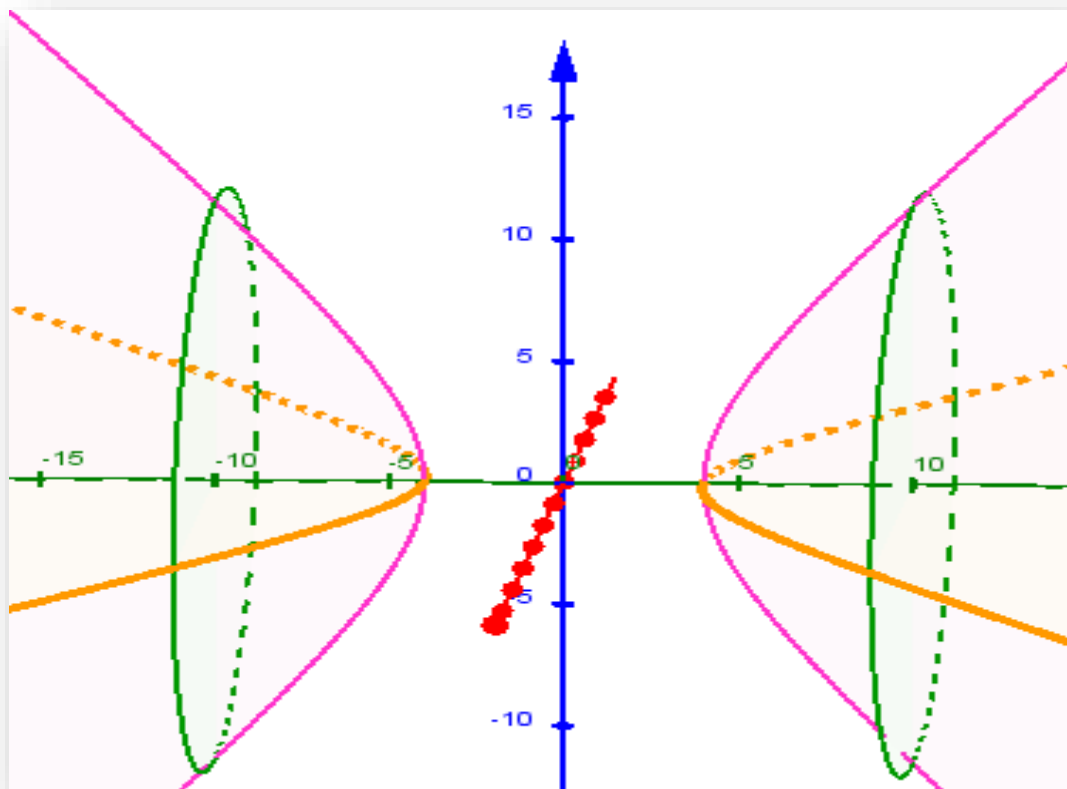
1. el eje del hiperboloide corresponde al término positivo, eje "y"
2. corta al eje "y" en ± 4 o sea pasa por el punto $P(0, \pm 4, 0)$, no corta al eje "x", ni al eje "z"
3. se observa en el plano $\begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{hipérbola eje real "y"} \\ y = 0 \rightarrow \text{no existe lugar geométrico} \\ z = 0 \rightarrow \text{hipérbola eje real "y"} \end{cases}$
4. si cortamos con planos \perp al eje de simetría "y" por ejemplo $y = \pm 10$

$$-\frac{x^2}{81} - \frac{z^2}{25} = 1 - \frac{100}{16}$$

$$\frac{x^2}{81} + \frac{z^2}{25} = \frac{21}{4}$$

Por lo tanto, para planos $y = k$ se verán elipses cada vez mayores

5. uniendo los cortes, quedan determinadas las dos hipérbolas ubicadas en los planos coordenados

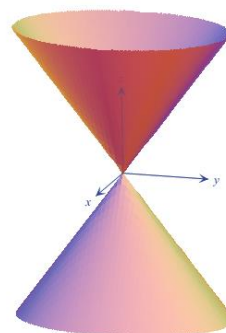


CONO

Una superficie cónica es generada por una recta que se mueve alrededor de un punto fijo. La recta móvil se denomina generatriz y el punto fijo es el vértice del cono. Las dos partes semejantes del cono separadas por el vértice, reciben el nombre de manto del cono

Los conos corresponden a cuádricas con centro de simetría, pueden ser elípticos o de revolución. Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.

Para identificar la superficie cónica realizaremos el siguiente análisis:

1. Intersección con los ejes coordenados

Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 0 \rightarrow P(0,0,0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow P(0,0,0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -\frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow P(0,0,0) \end{cases}$

2. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow P(0,0,0) \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow \text{par de rectas} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow \text{par de rectas} \end{cases}$

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \end{cases}$ $\frac{k^2}{c^2} > 0 \rightarrow -c < k < c \text{ elipses}$	$\begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2} \rightarrow \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} \end{cases}$ <p>Hipérbolas eje real "z"</p>	$\begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{a^2} \rightarrow \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} \end{cases}$ <p>Hipérbolas eje real "z"</p>

- Analiza y grafica

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 0$$

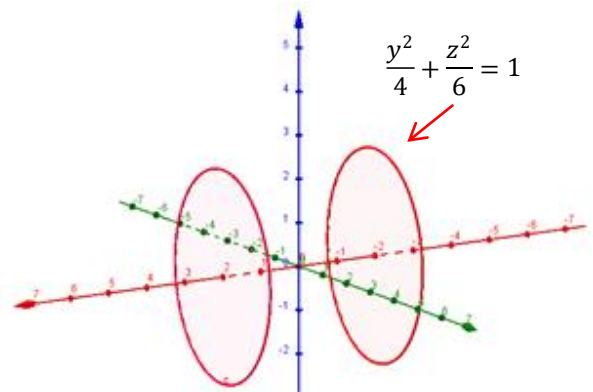
Para identificar el cono lo hacemos siguiendo el procedimiento descrito anteriormente

Luego:

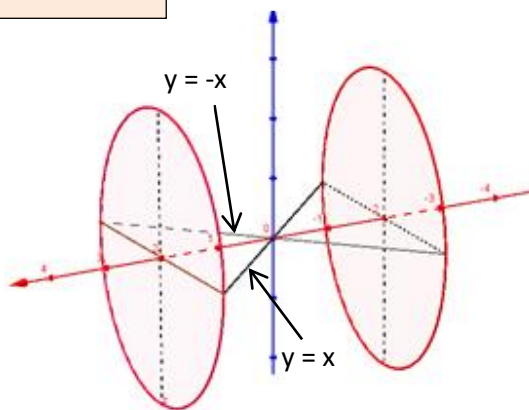
1. Identificamos el eje del cono (la variable del término de diferente signo) → eje x
2. Hacemos los cortes perpendiculares al eje del cono, $x = \pm 2$, y los graficamos en el espacio (estos cortes son elipses)

$$\rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 2 \rightarrow \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1$$

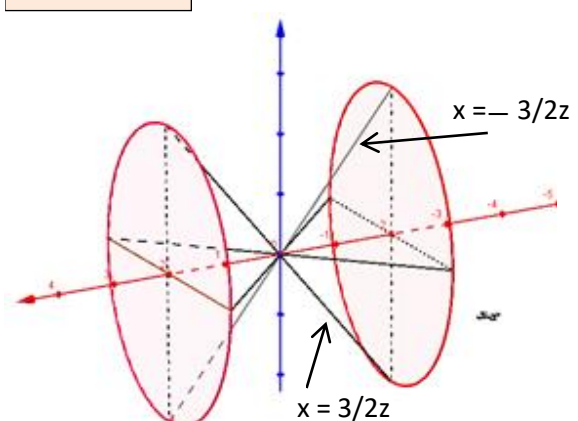
3. Hacemos los cortes en los planos coordenados



Plano $z=0$



Plano $y=0$



SUPERFICIES CILINDRICAS

Es la superficie generada por una recta móvil que se denomina generatriz que gira con respecto a una curva fija denominada directriz. La generatriz no debe ser coplanar con la directriz.

Estudiaremos únicamente las superficies cilíndricas rectas que son aquellas en donde la generatriz es perpendicular al plano que contiene a la directriz, y ésta a su vez está contenida en uno de los tres planos coordenados.

Si la directriz es:

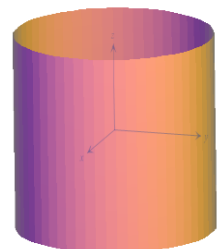
- una circunferencia
- una elipse
- una hipérbola
- una parábola

superficie cilíndrica circular recta

superficie cilíndrica elíptica recta

superficie cilíndrica hiperbólica recta

superficie cilíndrica parabólica recta



Observación: en \mathbb{R}^3 una superficie cilíndrica es una ecuación de segundo grado en dos variables, siendo la generatriz paralela al eje de la variable cuyo coeficiente es cero (está ausente en la ecuación, pero dicha variable al estar multiplicada por cero asume infinitos valores).

- **Propuestos 3:** Analiza y grafica

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

1. Intersección con los ejes coordenados

Eje “x”	Eje “y”	Eje “z”

2. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano “x y”	Traza sobre el plano “x z”	Traza sobre el plano “y z”

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

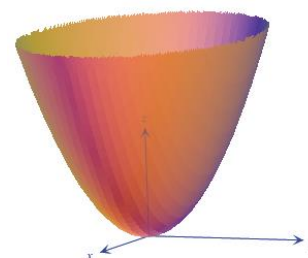
Traza sobre el plano “xy”	Traza sobre el plano “xz”	Traza sobre el plano “yz”

CUÁDRICAS SIN CENTRO DE SIMETRÍA

PARABOLOIDE ELÍPTICO

(términos cuadráticos positivos). El eje de simetría es el término lineal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm cz$$



PROPUESTO 4 identifica la superficie haciendo:

1. Intersección con los ejes coordenados

Eje “x”	Eje “y”	Eje “z”

2. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano "x y"	Traza sobre el plano "x z"	Traza sobre el plano "y z"

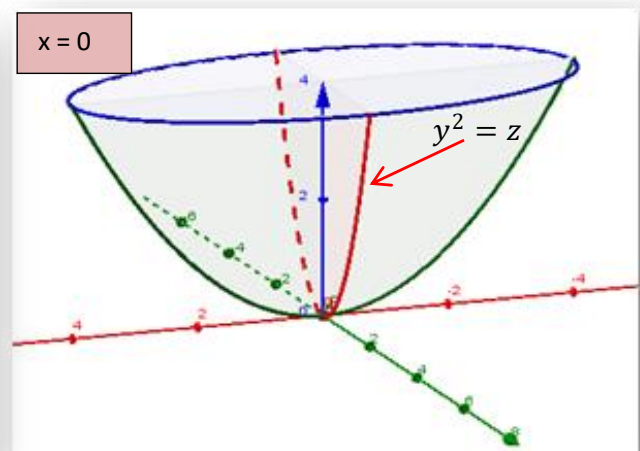
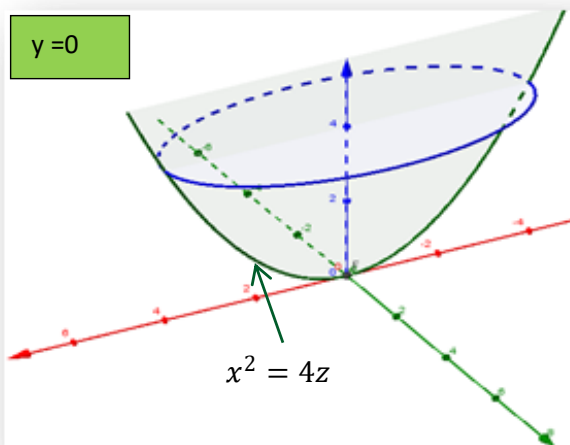
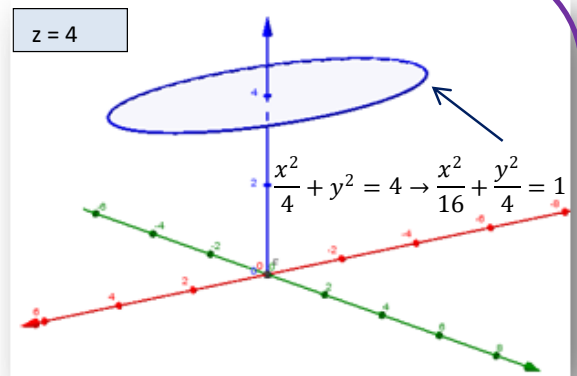
3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"

Identifica y grafica la siguiente superficie

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = z$$

- ✓ Identificamos que el eje del paraboloide es "z"
- ✓ Una vez realizados los análisis correspondientes a las intersecciones con los ejes coordenados, y trazas en los planos coordenados se concluye que el vértice es $V(0,0,0)$
- ✓ Los cortes perpendiculares al eje del paraboloide son....., como $a \neq b$ no corresponde a un superficie de
- ✓ Al cortar con un plano perpendicular al eje "z", ej. $z = 4$ la cónica que resulta es
- ✓ Al hacer las trazas con los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, se obtienen



- Sea la superficie $Ax^2 + By^2 + Cz = 1$

Determina el conjunto de valores que pueden tomar A, B, C para que la ecuación, represente un paraboloides cuya intersección con el plano $z = 0$ sea una circunferencia de radio 4 y la intersección con el plano $z = -5$ sea una circunferencia de radio 1.

Solución: para que sea un paraboloides $C \neq 0$

La traza con el plano $z = 0$ debe ser una circunferencia de radio 4 entonces:

$$Ax^2 + By^2 = 1 \rightarrow A = B \text{ y positivos} \rightarrow Ax^2 + Ay^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{A}$$

por lo tanto, debe ser:

$$r^2 = \frac{1}{A} = 16 \rightarrow A = \frac{1}{16}$$

La intersección con el plano $z = -5$ debe ser una circunferencia de radio 1

De modo que

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + C(-5) = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1 + 5C \rightarrow x^2 + y^2 = 16(1 + 5C)$$

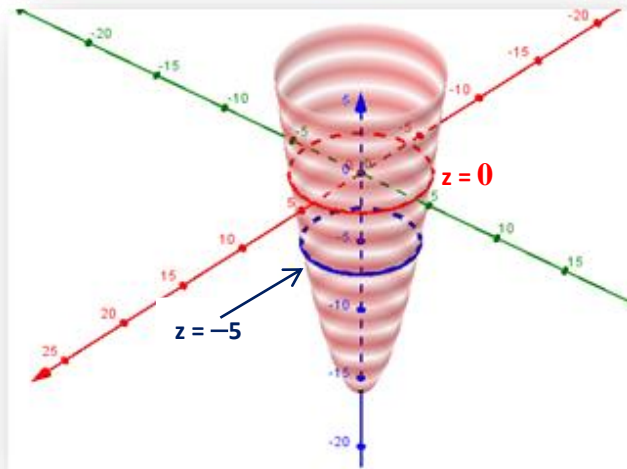
$$\text{Como } 16(1 + 5C) = r^2 \quad y \quad r = 1 \rightarrow 16 + 80C = 1 \rightarrow C = -\frac{15}{80}$$

Luego, como sus intersecciones con planos perpendiculares al eje de simetría son circunferencias, se trata de un **paraboloides de revolución**

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{15z}{80} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1 + \frac{15z}{80} \rightarrow$$

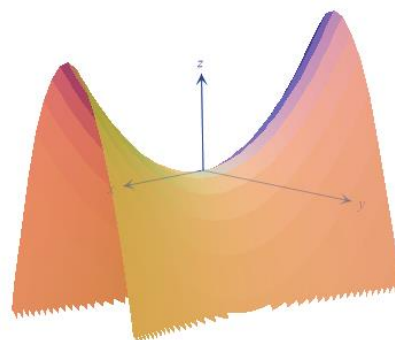
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{15}{80} \left(z + \frac{80}{15} \right)$$



PARABOLOIDE HIPERBOLICO

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm cz$$

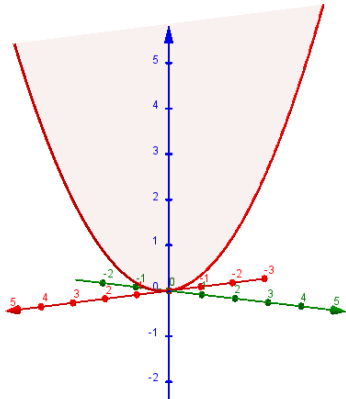
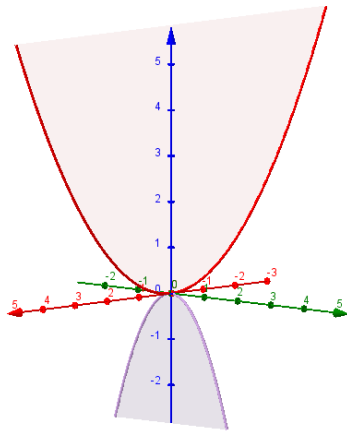
El eje del paraboloides es el término de grado uno.



1. Intersección con los ejes coordenados

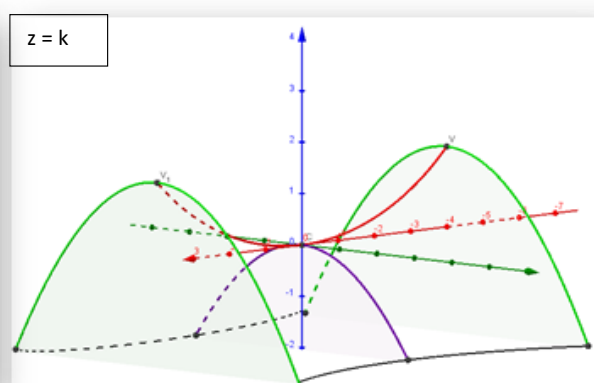
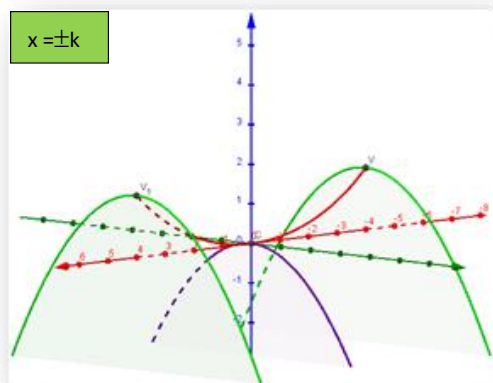
Eje "x"	Eje "y"	Eje "z"
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 0 \rightarrow P(0,0,0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow P(0,0,0) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \rightarrow P(0,0,0) \end{cases}$

2. Intersección con los planos coordenados

Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"	Traza sobre el plano "yz"
$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow \text{par directas} \end{cases}$	$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = cz \rightarrow \text{parábola} \end{cases}$ 	$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} = -cz \rightarrow \text{parábola} \end{cases}$ 

3. Intersección con planos paralelos a los planos coordenados

Traza sobre el plano "yz"	Traza sobre el plano "xy"	Traza sobre el plano "xz"
$\begin{cases} x = \pm k \\ \frac{y^2}{b^2} = -cz - \frac{k^2}{a^2} \end{cases}$ <p>parábolas eje de simetría "z" abiertas hacia abajo</p>	$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck \end{cases}$ <p>$k > 0 \rightarrow$ hip. eje real "x" $k < 0 \rightarrow$ hip. eje real "y"</p>	$\begin{cases} y = \pm k \\ \frac{x^2}{a^2} = cz + \frac{k^2}{b^2} \end{cases}$ <p>parábola eje simetría "z", abiertas hacia arriba</p>



TRABAJO PRACTICO CUADRICAS

1. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan 5 unidades del punto $Q(2,1,4)$.

2. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al punto $A(2,5,-1)$ es el doble que su distancia al plano $\pi : y = 2$

3. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano $\pi : y = 2$ es el doble que su distancia al punto $A(\frac{5}{2}, -1, 0)$

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan del punto $A(1,1,1)$ y del plano $\pi : y = 2$

5. Realiza un estudio completo, identifica y grafica las siguientes superficies

a) $x^2 - y^2 + z^2 = 4$

b) $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$

c) $4x^2 + y + 4z^2 + 8z = 0$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$

6. Sea la superficie $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

Determina el conjunto de valores que pueden tomar A, B, C para que la ecuación, represente un hiperboloide de una hoja, de eje "x", cuyas intersecciones con los planos $|x| = 4$ sean circunferencias de radio 2 y con el plano $x = 0$, de radio 1

7. Sea la superficie $Ax^2 + By^2 + Cz = 1$

Determina el conjunto de valores que pueden tomar A, B, C para que la ecuación, represente un paraboloide cuya intersección con los planos:

$z = 0$ sea una elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$y = 0$ una parábola con LR = 4 y eje de simetría el eje z

8. Halla los valores de A, B y D para que la superficie $Ax^2 + By^2 + z^2 = D$ sea una superficie cónica de eje "y", tal que verifique simultáneamente:

a) su intersección con el plano "yz" sea un par de rectas perpendiculares

b) su sección con el plano $y = 2$ sea una elipse, donde uno de sus vértices tenga abscisa $2/3$

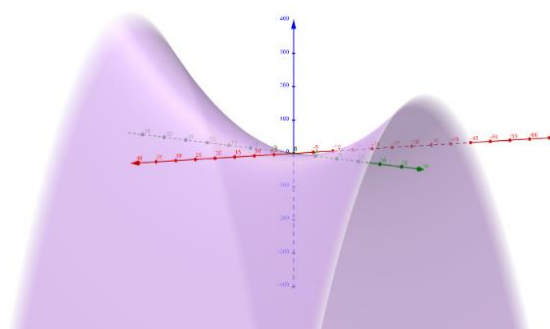
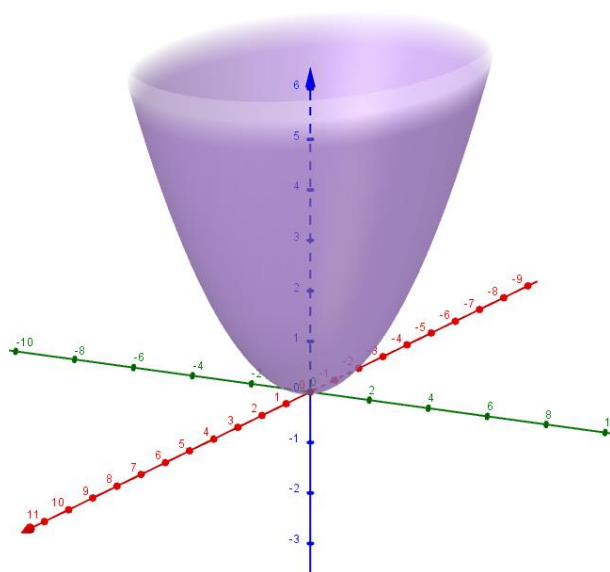
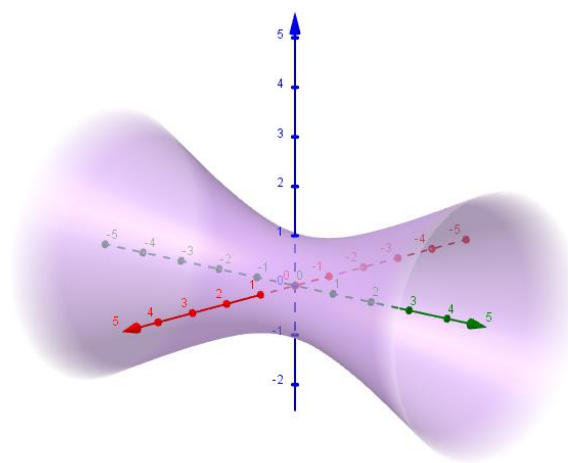
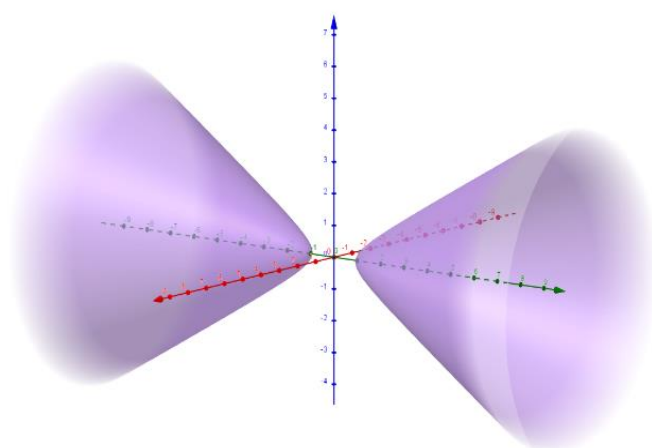
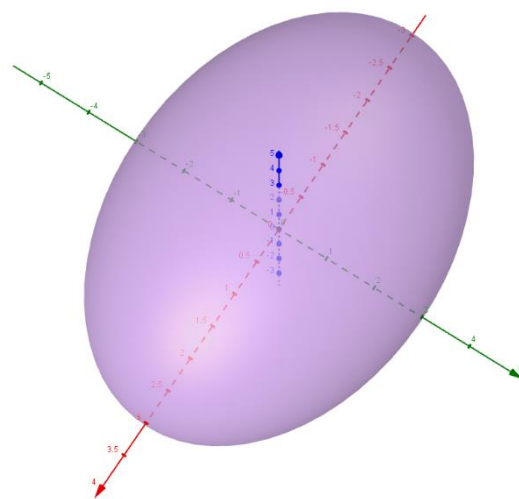
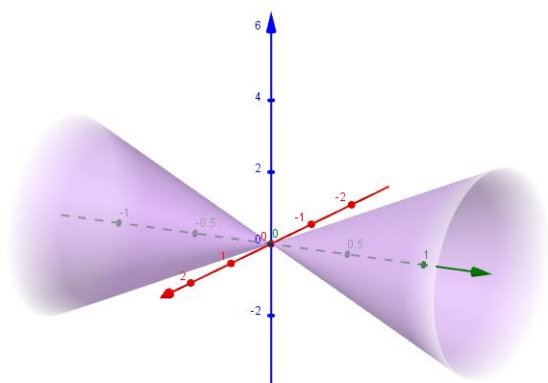
9. Considerando la ecuación: $-3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 12x + 48y + 96 = 0$

- a. Determina las coordenadas del centro en caso de ser una cuádrica con centro.
- b. Escribe su ecuación canónica
- c. Traslada los ejes y escribirlos en función de los nuevos ejes trasladados
- d. Estudia: intersección con ejes y planos coordenados trasladados
- e. Determina la curva resultante de intersecarla con el plano $x = 10$
- f. Grafica

Observación: para el punto c considera $x' = x - h, y' = y - j, z' = z - k$

10. Identifica cuál de las ecuaciones corresponden a cada gráfico.

- a. $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$
- b. $4x^2 - y^2 + 4z = 0$
- c. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$
- d. $4x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$
- e. $y^2 = 4x^2 + 9z^2$
- f. $12z = 4x^2 + 3y^2$
- g. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- h. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$



ESPACIOS VECTORIALES

ESPACIOS VECTORIALES

Introducción: En la Unidad 1 trabajamos con vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Definimos operaciones como la suma de vectores y el producto de escalares por vectores y analizamos algunas propiedades de estas operaciones.

En esta Unidad, daremos un paso más en el concepto de vector ya que analizaremos una serie de axiomas (propiedades) que si son cumplidos o verificados por todos los elementos de un conjunto V permitirá llamar **vectores** a sus elementos y **espacio vectorial** al conjunto V .

DEFINICIÓN: Un **espacio vectorial** V es un conjunto de objetos denominados vectores, sobre el cual están definidas dos operaciones: la suma y la multiplicación de un escalar por un vector y que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación:

Axioma I: Si $\vec{u} \in V$ y $\vec{v} \in V \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$ *Ley de cerradura bajo la suma*

Axioma II: Asociatividad: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Axioma III: Existe elemento neutro, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Axioma IV: para cada $\vec{u} \in V$ existe un vector $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Axioma V: Conmutatividad: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Axioma VI: si $\vec{u} \in V \wedge \alpha \in \mathcal{R}$ entonces $\alpha\vec{u} \in V$ *Ley de cerradura bajo la multiplicación*

Axioma VII: Distributividad respecto de la suma de escalares $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

Axioma VIII: Distributividad respecto de la suma de vectores $(\vec{u} + \vec{v})\alpha = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

Axioma IX: Asociatividad respecto de los escalares: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

Axioma X: Identidad $1\vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$

Es importante advertir que un espacio vectorial consta de cuatro elementos un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y dos operaciones. V es un conjunto no vacío, porque contiene al cero de acuerdo al Axioma III. Como trabajaremos con escalares que están en el campo de los números reales los llamaremos **espacios vectoriales reales**.

Ejemplos de espacios vectoriales

Para comprobar que determinado conjunto es un espacio vectorial es necesario definir o especificar, explícitamente

1. Las dos operaciones, la suma y la multiplicación por un escalar
2. El elemento neutro
3. El negativo de cada elemento
4. A continuación, comprobar la existencia de los axiomas.

- Espacio \mathbb{R}^n

Para cualquier $n \geq 1$, \mathbb{R}^n es un espacio vectorial con las dos operaciones de suma y multiplicación por un escalar.

Por ejemplo: si sumamos dos vectores de \mathbb{R}^2 obtenemos otro vector en \mathbb{R}^2 , si a un vector en \mathbb{R}^2 lo multiplicamos por un escalar obtendremos un vector escalado en \mathbb{R}^2 , el elemento neutro es el vector $(0,0)$; luego es fácil comprobar que se cumplen todos los axiomas.

- El conjunto \mathbb{Z} de los números enteros

este conjunto con las operaciones habituales no es un espacio vectorial. Es suficiente determinar que uno de los diez axiomas es falso y pensar un ejemplo específico en el cual no sea verdadero (un contraejemplo), por ejemplo, no se cumple el axioma VI si $\alpha=1/2$ entonces $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

- Suma o resta de matrices del mismo orden

El conjunto de todas las matrices de $m \times n$ es un espacio vectorial con las dos operaciones de suma y multiplicación por un escalar. Este espacio vectorial se denota como M_{mn}

Por ejemplo: sea 2×3 el tamaño de una matriz, sabemos que la suma de dos matrices de 2×3 es también una matriz de 2×3 y que al multiplicar por un escalar una matriz de 2×3 , nos da una matriz de 2×3 , por lo tanto, se cumplen las dos operaciones de cerradura. El vector nulo o elemento neutro $\mathbf{0}$ es la matriz nula de 2×3 , y la matriz negativa de una matriz A de 2×3 es precisamente la matriz $-A$ de 2×3 ; luego se cumplen todos los axiomas

- Suma o resta de polinomios con coeficientes reales

El conjunto \mathcal{P}_n de todos los polinomios de grado menor o igual a n es un espacio vectorial.

Por ejemplo sea \mathcal{P}_2 el conjunto de los polinomios de grado 2 o menor, con coeficientes reales. Sean

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad y \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

$$p(x) + q(x) = b_2x^2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

Tiene un grado a lo sumo de 2 y por lo tanto, se encuentra en \mathcal{P}_2 . Si α es un escalar entonces

$$\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2$$

También se encuentra en \mathcal{P}_2 . Esto verifica los axiomas I y VI

El vector nulo es el polinomio nulo, es decir, el polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero. El opuesto de un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ es el polinomio $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$

PROPUESTA 1: Determina si son espacios vectoriales (se desarrolla en clase teórica)

- Espacio vectorial trivial $V = \{0\}$
- Espacio cuyo único elemento es el número $V = \{1\}$
- El conjunto de los números reales
- El conjunto de los números naturales
- El conjunto de puntos \mathbb{R}^2 que se encuentran en una recta $y = mx$
- El conjunto de puntos \mathbb{R}^2 que se encuentran en una recta que no pasa por el origen de coordenadas $y = mx + b$
- El conjunto de puntos \mathbb{R}^3 que se encuentran en un plano que pasa por el origen de coordenadas $ax + by + cz = 0$

El conjunto de puntos \mathbb{R}^3 que se encuentran en un plano que no pasa por el origen de coordenadas $ax + by + cz = d$

SUBESPACIOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Todos los espacios vectoriales tienen además subconjuntos que son también espacios vectoriales, denominados **Subespacios Vectoriales**

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial se denomina **subespacio** de V si H es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V , es decir si se cumplen las dos leyes de cerradura

I) Si $\vec{u} \in H$ y $\vec{v} \in H \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in H$ Ley de cerradura bajo la suma

VI) Si $\vec{u} \in H$ y $\alpha \in \mathcal{R} \rightarrow (\alpha\vec{u}) \in H$ Ley de cerradura bajo la multiplicación

Sea $H = \{(x, y): y = mx\}$ demuestra que es un subespacio de \mathbb{R}^2

Demostración

El subespacio vectorial H está formado por puntos que están sobre la recta que tienen pendiente m y pasan por el origen, tomando dos vectores genéricos tendremos:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ mx' \end{pmatrix}$$

Axioma I
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ mx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ m(x + x') \end{pmatrix} \text{ si } x + x' = x''$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x'' \\ mx'' \end{pmatrix} \text{ se obtiene una recta que pasa por el origen}$$

Axioma VI
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} \text{ entonces } \alpha\vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ m\alpha x \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, queda demostrado que toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial.

Demuestra que un plano que pasa por el origen es un subespacio vectorial

$$H = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$$

Sea $H = \{(x, y): y = x + 3\}$ comprueba que NO es un subespacio vectorial.

Solución: La manera más fácil de comprobar que H no es un subespacio vectorial es observar que $\vec{0} = (0, 0)$ no se encuentra en H porque $0 = 0 + 3 \rightarrow 0 \neq 3$

Otra posibilidad es tomar dos vectores que pertenezcan a la recta, por ejemplo

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ están en } H \text{ pero } \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ no está en } H$$

porque al sustituir los valores en la recta nos queda $6 \neq 0 + 3$

Comprueba que un plano que NO pasa por el origen no es un subespacio vectorial

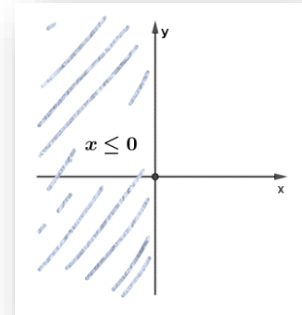
$$H = \{(x, y, z): x + y - z = 3\}$$

Sea $H = \{(x, y): x \leq 0\}$ comprueba si es o no un subespacio vectorial

Solución: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha = -4 \rightarrow -4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \notin H$

No se cumple el axioma VI de la cerradura bajo la multiplicación

¿Se cumple el axioma I?



Comprueba que el conjunto de puntos $x^2 + y^2 = 1$ no es un subespacio de \mathbb{R}^2

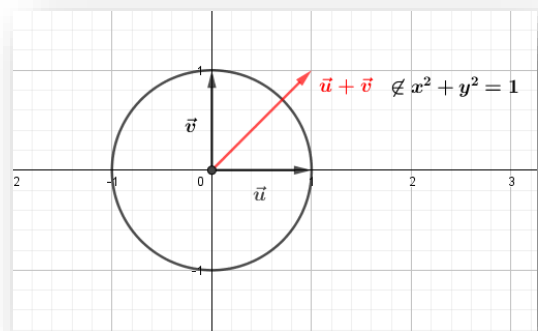
Solución: sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in H$

Por el axioma I: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin H$

Porque $1 + 1 \neq 1$

También se podría demostrar por el axioma VI

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 4 \rightarrow 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \notin H$



Comprueba que el conjunto de los polinomios de segundo grado no es un subespacio vectorial

$$p(x) = x^2 \quad y \quad q(x) = -x^2 + x + 4$$

Aplicando el Axioma I $p(x) + q(x) = x + 4$

La suma de ambos polinomios no satisface el axioma 1, porque no se obtiene un polinomio de grado 2

¿El conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos, sería un subespacio vectorial?

Comprueba que el conjunto de matrices singulares (sin inversa) no es un subespacio de $M_{2 \times 2}$

Demostración

Elegimos dos matrices cualesquiera que no tengan inversa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por el axioma I de la ley de cerradura bajo la suma

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz resultante es no singular, es decir tiene inversa por lo tanto no se comprueba el axioma I

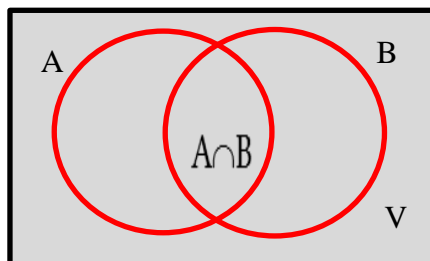
El conjunto de matrices diagonales ¿sería un subespacio vectorial?

INTERSECCIÓN ENTRE SUBESPACIOS VECTORIALES

Sean A y B dos subespacios del espacio vectorial $(V; +; \mathbb{R}; \cdot)$

La intersección de los subespacios es el conjunto de los vectores del espacio vectorial $(V; +; \mathbb{R}; \cdot)$ que pertenecen, simultáneamente, a los subespacios vectoriales A y B

Para encontrar la intersección de dos subespacios se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo



$$A \cap B = \{\vec{v} \in V / \vec{v} \in A \wedge \vec{v} \in B\}$$

Determina la intersección entre los siguientes subespacios

- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ y $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$

Solución: es la intersección entre dos planos, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{parametrizando } y = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$H \cap H_1 = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}^3 / \lambda \in \mathbb{R} \text{ es una recta que pasa por el origen}$$

- $H_2 = \{A \in M^{2 \times 2} / a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0\}$ y $H_3 = \{A \in M^{2 \times 2} / -a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0\}$

Solución: para encontrar la solución debemos encontrar la matriz que cumpla simultáneamente con las condiciones de los dos subespacios

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de Gauss - Jordan nos queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = 0 \\ a_{12} + a_{22} = 0 \end{cases} \rightarrow a_{11} = -a_{21} \quad a_{12} = -a_{22}$$

$$H_2 \cap H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\lambda & -\mu \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} / \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

PROPUESTA 2:

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ y $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$
- $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0 \wedge y - z = 0\}$
- $H_3 = \{p(x) \in P^3 / a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0\}$ y $H_4 = \{p(x) \in P^3 / a_3 + a_2 + a_1 = 0 \wedge a_3 + a_1 + a_0 = 0\}$

TRABAJO PRACTICO ESPACIO Y SUBESPACIO VECTORIAL

1. Define que es un Espacio Vectorial
2. En los siguientes ítems, determina si el conjunto dado, junto con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, es un espacio vectorial. Si no lo es, enumera todos los axiomas donde no son válidos
 - a. El conjunto de todos los vectores de \mathbb{R}^2 de la forma (x, x)
 - b. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales de la forma $(x, 0)$
 - c. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales de la forma $(1, y)$
 - d. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales de la forma $(x, y) / y \geq 0$
 - e. El conjunto de vectores de \mathbb{R}^3 de la forma (y, y, y) .
 - f. El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de 2×2 , con las operaciones habituales de suma y multiplicación

g. El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ donde $a \cdot d = 0$

h. El conjunto de todas las matrices de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & d \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

3. Define que es un Subespacio Vectorial.
4. ¿Cuáles son los posibles subespacios de $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$ y $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$
5. ¿Por qué solamente las rectas que pasan por el origen son subespacios de $(\mathbb{R}^2; +; \mathbb{R}; \cdot)$?
6. ¿Por qué solamente las rectas o los planos que pasan por el origen son subespacios $(\mathbb{R}^3; +; \mathbb{R}; \cdot)$
7. Investiga si el conjunto de todas las matrices de 2×2 cuyo determinante es nulo, es un subespacio vectorial
8. Investiga cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial P_3
 - a. Todos los polinomios $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ para los cuales $a_0 = 0$
 - b. Todos los polinomios $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ para los cuales $a_0 = 8$
 - c. Todos los polinomios $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ que tienen como coeficientes a números naturales
9. Analiza cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de las $M^{2 \times 2}$

a. $H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} : a + b = 0 \wedge c = d \right\}$

$$b. \quad H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} : |A| = 0 \right\}$$

$$c. \quad H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M^{2 \times 2} : a = 3b = 0 \wedge c = d = 0 \right\}$$

10. Analiza cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial dado

$$a. \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$$

$$b. \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z - 2\}$$

$$c. \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = 0\}$$

$$d. \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + (y)^2 \leq 4\}$$

$$e. \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x + y + z} = 0\}$$

$$f. \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x)^2 + (y)^2 \leq 9\}$$

$$g. \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$$

$$h. \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z - 4 = 0\}$$

$$i. \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y \wedge z = y\}$$

j. H es el conjunto de vectores de \mathbb{R}^2 cuya segunda componente es el cuadrado de la primera

k. El conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 que se encuentran en el primer y tercer cuadrante

COMBINACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN un vector \vec{v} de un espacio vectorial V se denomina **combinación lineal de los vectores** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ si \vec{v} se puede expresar de la forma

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ son escalares

Ejemplos:

- $(2,6)$ es CL de $\{(1,0), (0,2)\}$ porque $(2,6) = 2(1,0) + 3(0,2)$
- $(2,6)$ no es CL de $\{(1,0), (2,0)\}$ porque no existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in R: (2,6) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(2,0)$ (comprueba)
- $(2,2,2)$ es CL de $(1,1,1)$ ya que $(2,2,2) = 2(1,1,1)$
- $(1,1,1)$ es CL de $\vec{v}_1 = (2,1,3)$ y $\vec{v}_2 = (1,0,2)$ ya que $(1,1,1) = 1\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2$ (comprueba)

Determina si el vector $(1,1,1)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores

$$\vec{u} = (1,2,3); \quad \vec{v} = (0,1,2); \quad \vec{w} = (-1,0,1)$$

Solución: $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(-1,0,1) = (1,1,1) \rightarrow$

Luego de aplicar el producto de escalares por vectores, la suma y la igualdad de vectores en R^3 se obtiene el siguiente sistema

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 + 1 \\ 2(\alpha_3 + 1) + \alpha_2 = 1 \rightarrow \alpha_2 = -1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Esta igualdad indica que existen infinitas CL

- Otra manera de resolver es por eliminación de renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 2 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \quad R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 = -1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 \in R \end{cases}$$

A partir del tercer renglón se concluye que el sistema tiene infinitas soluciones. Por lo tanto, el vector $(1,1,1)$ se puede escribir como CL de los vectores dados y dicha combinación no es única

Si $\alpha_3 = 0$ tendremos $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -1$. Por lo tanto, para este valor de α_3 tenemos

$$1(1,2,3) - 1(0,1,2) + 0(-1,0,1) = (1,1,1)$$

Otras elecciones para α_3 producen otras maneras de escribir el vector $(1,1,1)$ como combinación lineal de los vectores $(1,2,3); (0,1,2); (-1,0,1)$

Determina si el vector $(1, -2, 3)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores del ejemplo anterior

Solución:

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(0, 1, 2) + \alpha_3(-1, 0, 1) = (1, -2, 3)$$

Luego de aplicar el producto de escalares por vectores, la suma entre vectores y la igualdad de vectores en \mathbb{R}^3 se obtiene el siguiente sistema

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 + 1 \\ 2(\alpha_3 + 1) + \alpha_2 = -2 \rightarrow \alpha_2 = -4 - 2\alpha_3 \\ 3\alpha_3 + 3 - 8 - 4\alpha_3 + \alpha_3 = 3 \rightarrow -8 \neq 0 \end{cases}$$

Esta desigualdad indica que NO existe CL

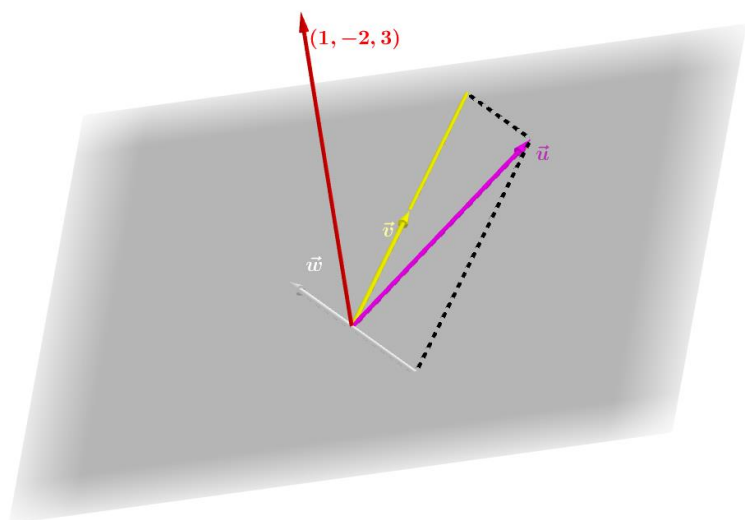
- Otra manera de resolver es por eliminación de renglones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right] \rightarrow$$

A partir del tercer renglón se concluye que el sistema al ser incompatible, no tiene solución. Así que el vector $(1, -2, 3)$ no puede expresarse como combinación lineal de los vectores dados

En forma geométrica, podemos ver que el vector $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$, los mismos son coplanares, entonces si el vector $(1, -2, 3)$ no es combinación lineal significa que no es coplanar con los demás vectores.



Halla el valor de k para que la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix}$ sea combinación lineal de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos la operación entre matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicamos el concepto de igualdad de matrices para obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\text{lineales} \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = k \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = k^2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de α_1 en la cuarta ecuación despejamos $\alpha_2 = 1$, reemplazando en la segunda ecuación obtenemos el valor de $k = 1$

Validación

$$1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observación: un vector se puede escribir como combinación lineal de manera única, de infinitas maneras o de ninguna.

CONJUNTO GENERADOR

DEFINICIÓN se dice que los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ generan el espacio vectorial V , cuando todo vector de V puede expresarse como la combinación lineal de dichos vectores $\vec{v} \in V \rightarrow \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3, \dots, \alpha_n \vec{v}_n$

ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

DEFINICIÓN El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ se llama **espacio generado** por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ y se representa por $gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Si $V = Gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ se dice que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ **generan** a V , y que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es un **conjunto generador** de V .

Para obtener el espacio generado por un conjunto de vectores, se debe resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de la combinación lineal de los vectores propuestos, donde las incógnitas son los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Analizando la solución del sistema, obtenemos el espacio vectorial generado.

$$V = gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} = \{\vec{v}: \vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3, \dots, \alpha_n \vec{v}_n\}$$

Por ejemplo:

1. $gen\{(1,0)\} = \{(x,y) \in R^2 / y = 0\}$
2. $gen\{(1,0); (0,1)\} = R^2$
3. $gen\{(1,0,0); (0,1,0)\} = \{(x,y,z) \in R^3 / z = 0\}$
4. $gen\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R^{n \times n} / b = d = 0\right\}$
5. $gen\{(1, t, t^2)\} = P_2$ genera todos los polinomios de grado menor o igual a 2, ya que todo polinomio se obtiene combinando linealmente los polinomios $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2$.
Por ejemplo: $1 + 2t - t^2 = 1p_1 + 2p_2 - 1p_3$

Defina el espacio generado por los vectores

- $\vec{v}_1 = (1,0,0) \quad \vec{v}_2 = (0,1,0) \quad \vec{v}_3 = (0,1,1)$

Solución: $\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,1,1) = (x,y,z) \rightarrow$

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, \alpha_3, \alpha_3) = (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_3 = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right] R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z - y \end{array} \right] \text{SCD, esto indica que se genera todo el espacio}$$

$$V = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \right\} \text{ se lee el conjunto generado por los vectores}$$

genera todo R^3

Teorema: Si uno de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n$ es combinación lineal de los restantes, el generador permanece igual si se elimina ese vector


IMPORTANTE

Calcula el $\text{gen}\{\vec{v}_1\}$

- $\vec{v}_1 = (2,4)$

Solución: $\alpha(2,4) = (x,y) \rightarrow (2\alpha, 4\alpha) = (x,y) \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = x \\ 4\alpha = y \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{x}{2} \rightarrow y = 2x$

$$H = \text{gen}\{(2,4)\} = \{(x,y) \in R: y = 2x\}$$

- Calcula el $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$\vec{v}_1 = (2,4) \quad \vec{v}_2 = (4,8)$$

Solución: $\alpha_1(2,4) + \alpha_2(4,8) = (x,y) \rightarrow (2\alpha_1, 4\alpha_1) + (4\alpha_2, 8\alpha_2) = (x,y) \rightarrow$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = x \\ 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = y \end{cases} \text{ resolviendo en forma matricial } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} R_2 \rightarrow \frac{R_2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \text{SCI tiene solución sí y sólo sí } y = 2x$$

$$H = \text{gen}\{(2,4); (4,8)\} = \{(x,y) \in R^2: y = 2x\}$$

Nota que \vec{v}_2 es el escalado de \vec{v}_1 , de acuerdo al teorema si se elimina el vector \vec{v}_2 el espacio generado es el mismo

- Calcula el $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ siendo $\vec{v}_1 = (1,0)$; $\vec{v}_2 = (0,2)$

Solución: $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,2) = (x,y) \rightarrow (\alpha_1, 0) + (0, 2\alpha_2) = (x,y) \rightarrow$

$$(\alpha_1, 2\alpha_2) = (x,y) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ 2\alpha_2 = y \end{cases}$$

en forma matricial $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \text{SCD } \begin{cases} \alpha_1 = x \\ 2\alpha_2 = y \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2 \in R^2) \rightarrow$

$$V = \text{gen}\{(1,0), (0,2)\} = \{(x,y) \in R^2\}$$

¿Qué pasaría si se agregara un vector más?

- $\vec{v}_1 = (1,0) \quad \vec{v}_2 = (0,2) \quad \vec{v}_3 = (2,4)$

Solución: $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,2) + \alpha_3(2,4) = (x,y) \rightarrow (\alpha_1, 0) + (0, 2\alpha_2) + (2\alpha_3, 0) = (x,y) \rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = x \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = y \end{cases} \text{ en forma matricial } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = y/2 \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^2 \rightarrow \text{se genera todo } R^2)$$

$$V = \text{gen}\{(1,0); (0,2); (2,4)\} = \{(x,y) \in R^2\}$$

Propiedad

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n\} \subset V \rightarrow$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots \dots \vec{v}_n\}$ es un subespacio de V .

CARACTERIZACIÓN

En \mathbb{R}^2

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{u}\}$ geoméricamente es una recta que contiene al origen, cuyo vector director es \vec{u}
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v})\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v}\}$ geoméricamente es una recta que contiene al origen, si $\vec{u} // \vec{v}$, o caso contrario todo \mathbb{R}^2

En \mathbb{R}^3

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha \vec{u}\}$ geoméricamente es una recta que contiene al origen, cuyo vector director es \vec{u}
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v})\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v}\}$ geoméricamente es
 - \rightarrow Una recta que contiene al origen, si $\vec{u} // \vec{v}$
 - \rightarrow Un plano que contiene al origen y es paralelo a ambos vectores
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\} \rightarrow H = \{\vec{x} = \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w}\}$ geoméricamente es
 - una recta que contiene al origen, si $\vec{u} // \vec{v} // \vec{w}$
 - un plano que contiene al origen si $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$
 - \mathbb{R}^3 si $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0$

CONJUNTO GENERADOR LINEALMENTE INDEPENDIENTE

Un conjunto de vectores se dice que es linealmente independiente, cuando ninguno de los vectores que forman el conjunto puede expresarse como combinación lineal de los otros. Eso indica que se cumple:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{Únicamente para } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n = 0$$

Como consecuencia de esto, se puede demostrar que todo conjunto de vectores linealmente independiente en \mathbb{R}^n contiene a lo más “n” vectores.

Por el contrario, si uno de los vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros, entonces conforman un conjunto de vectores **linealmente dependiente**

CARACTERIZACIÓN

En \mathbb{R}^2

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow LD$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow Si \vec{u} = \lambda \vec{v} \rightarrow LD$
 $\rightarrow Si \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \rightarrow Si \vec{u} // \vec{v} // \vec{w} \text{ es LD}$
 $\rightarrow Si \vec{u} \neq \vec{v} \neq \vec{w} \text{ es LD}$

En \mathbb{R}^3

- $A = \{\vec{0}\} \rightarrow LD$
- $A = \{\vec{u} \neq \vec{0}\} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow Si \vec{u} = \lambda \vec{v} \rightarrow LD$
 $\rightarrow Si \vec{u} \neq \lambda \vec{v} \rightarrow LI$
- $A = \{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \rightarrow si \vec{u} // \vec{v} // \vec{w} \text{ es LD}$
 $\rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \text{ son coplanares A es LD}$
 $\rightarrow si \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0 \text{ no son coplanares es LI}$

Teorema: Dado $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{v}_r\} \subset V$ tal que A es LD $\Leftrightarrow \exists$ un vector \vec{v} de A que es combinación lineal de los restantes

Propiedades

$A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{v}_r\} \subset \mathbb{R}^n$ es LD $\Leftrightarrow r > n$ (r número de vectores)

$A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{0}, \vec{v}_r\} \subset V$ es LD

$A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots k\vec{v}_3, \vec{v}_r\} \subset V$ es LD



RELACION CON UN SISTEMA HOMOGENEO DE ECUACIONES

Si consideramos en \mathbb{R}^2 un sistema de dos vectores independientes, para que se cumpla

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}, \text{ es decir } \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} = 0 \end{cases} \quad \text{en que sabemos que si tomamos como incógnitas}$$

α_1 y α_2 y el determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ la única solución es $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$ y los dos vectores serán linealmente independientes.

Observación: por lo tanto una ecuación vectorial de este tipo

$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = 0$ nos lleva a resolver un sistema homogéneo

- Si dicho sistema es compatible determinado (solución trivial) entonces será LI
- Si es compatible indeterminado (solución no trivial) entonces el conjunto de vectores es LD

Prueba si los vectores son LI o LD

- $\vec{u} = (-2, 0, 0)$; $\vec{v} = (-3, -1, 0)$; $\vec{w} = (3, -9, -6)$

Solución:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ -\alpha_2 - 9\alpha_3 \\ -6\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 - 9\alpha_3 = 0 \\ -6\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

despejando $\alpha_3 = 0$, haciendo sustitución hacia atrás $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 0$. Los vectores son LI

Otra posibilidad es analizar si los vectores son o no coplanares

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{los vectores no son coplanares}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ los vectores son linealmente independientes

- $\vec{u} = (-2, 6, 4)$; $\vec{v} = (-3, -1, 2)$; $\vec{w} = (3, -9, -6)$

Solución: $\vec{u} = (-2, 6, 4)$; $\vec{v} = (-3, -1, 2)$; $\vec{w} = (3, -9, -6)$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 6 & -1 & -9 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{los vectores son coplanares} \rightarrow \text{linealmente dependientes}$$

Aplicando el Teorema si un vector es CL de los otros \rightarrow LD haciendo la CL

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 3 \\ 6 & -1 & -9 \\ 4 & 2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow \frac{R_1}{-2} \\ R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{3}{2} \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow LD$$

- $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Solución: $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ realizando la distributiva y sumando

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & -1\alpha_1 \\ 4\alpha_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3\alpha_2 \\ \alpha_2 & 5\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + 5\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ igualando las componentes}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \end{cases} \text{ las matrices son LI}$$

COMO DETERMINAR SI UN CONJUNTO GENERADOR ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O INDEPENDIENTE

Debemos resolver el sistema homogéneo que se obtiene de la combinación lineal de los vectores para obtener el vector “cero”. Como la condición para que sea LI es que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ dicho sistema debe tener única solución, es decir la trivial.

Verifica si son o no linealmente independientes los vectores

- $\vec{u} = (1,0,0)$; $\vec{v} = (0,2,0)$; $\vec{w} = (0,0,3)$

Solución:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{los vectores son LI}$$

- $\vec{u} = (-2,6,4)$; $\vec{v} = (-3,-1,2)$

Solución: $\vec{u} = (-2,6,4)$; $\vec{v} = (-3,-1,2)$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ 6\alpha_1 - 1\alpha_2 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_1 - 1\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1]{R_1 \rightarrow \frac{R_1}{-2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1]{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

del 2do. renglón $\alpha_2 = 0$; \rightarrow haciendo sustitución hacia atrás

$\alpha_1 = 0 \rightarrow$ los vectores son LI

PROPUESTA

a) $\vec{u} = (-2,-4)$; $\vec{v} = (3,6)$

b) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\vec{u} = 2x^2 + 4x + 8$; $\vec{v} = -2x^2 + x + 1$; $\vec{w} = x^2 + x$

RELACION ENTRE INDEPENDENCIA LINEAL Y CONJUNTO GENERADOR

Tres vectores en \mathbb{R}^3 generan \mathbb{R}^3 si su determinante es distinto de cero.

Nota: *Si el $\det A \neq 0$, siendo las columnas de A los vectores del conjunto generador, entonces estos son LI ¿Por qué?

*Si $\det A \neq 0$, los vectores no son coplanares, tres vectores de \mathbb{R}^3 generan \mathbb{R}^3

*Si $\det A \neq 0$, dos vectores de \mathbb{R}^2 generan \mathbb{R}^2

Puede generalizarse: Todo conjunto de "n" vectores LI de \mathbb{R}^n generan \mathbb{R}^n

Prueba si el conjunto es LI y si genera el espacio o un sub espacio de este

- De polinomios P_2 : $1 - x$; $1 + x$; $1 + x^2$

Luego de plantear la combinación lineal con el vector nulo, aplicar la propiedad distributiva e igualar las componentes homólogas, el conjunto de polinomio quedaría así

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ los polinomios son LI}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{LI haciendo la comprobación con el determinante}$$

Para saber qué espacio o subespacio generan se hace la combinación lineal con (a_0, a_1, a_2)

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right] R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 2 & 1 & a_1 + a_0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right] R_2 \rightarrow \frac{R_2}{2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{a_1 + a_0}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 &\rightarrow R_2 - \frac{1}{2} R_3 \end{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1 + a_0}{2} - \frac{a_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \end{array} \right]$$

Se generan todos los polinomios de P^2

TRABAJO PRACTICO COMBINACION LINEAL, ESPACIO GENERADO, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Define que es Combinación Lineal.

1. ¿Es el vector $(-1,5)$ combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(-2,2)$
2. En caso de ser posible expresa el vector $(1, -2,2)$ como combinación lineal de los vectores $(1,2,3)$; $(0,1,2)$ y $(-1,0,1)$
3. Determina si la matriz $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ puede expresarse como combinación lineal de las matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$
4. Determina si el polinomio $P(x) = 2x^2 + 3x + 3$ se puede escribir como CL de los polinomios $\{x + 1; x^2 + 1; 7\}$
5. Determina si el polinomio $P(x) = 5x^2 + x + 1$ se puede escribir como CL de los polinomios $\{2x^2 + 5; 3x + 2; 5x^2 + x + 1\}$
6. Considera las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determina todas las combinaciones lineales de A, B y C que den como resultado la matriz nula de $M_{2 \times 2}$
7. Dado el conjunto de vectores del EVR indicado, comprueba si los vectores \vec{u} y \vec{v} se pueden expresar como combinación lineal de dicho conjunto.
 - 7.1) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$
 - 7.2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - 7.3) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - 7.4) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
8. Una empresa de artículos deportivos tiene dos fábricas, y en cada una se ensamblan bicicletas de montaña fabricadas en aluminio y titanio. La primera planta produce 150 bicicletas de aluminio y 15 de titanio por día, la segunda, 220 y 20, respectivamente. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 150 \\ 15 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \end{pmatrix}$, calcula e interpreta el significado de las siguientes combinaciones:
 - a) $\vec{u} + \vec{v}$
 - b) $\vec{v} - \vec{u}$
 - c) $10 \vec{u}$
 - d) $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$
 - e) $10 \vec{u}$
9. ¿Cuántos días debe trabajar cada fábrica para que la empresa entregue 2600 bicicletas de aluminio y 250 de titanio?
10. Demuestra que cualquier vector de $\mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. Calcula el o los valores de k tales que $\begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -2k \end{pmatrix}$ sea una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

12. ¿Para qué valores de k el vector $(1,2,3)$ es una combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$; $(0,0,1)$ $(1,2,k)$?

13. Halla los valores de k para los cuales el vector \vec{u} es combinación lineal del conjunto A

a) $\vec{u} = (k, k^2)$ $A = \{(1, -1); (-1, 1)\}$

b) $U = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

14. Define que se entiende por **Espacio Generado y Conjunto Generador**

15. Define los espacios vectoriales generados por la combinación lineal de los vectores.

Nota: en todos los casos debes primero hacer la combinación lineal

a) $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ $\vec{v}_2 = (0,1,0)$

b) $\vec{v}_1 = (1,0,0)$ $\vec{v}_2 = (0,1,0)$ $\vec{v}_3 = (1,1,0)$

c) Los polinomios $x^0, x^1, x^2, 4x^2$

d) Las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. ¿Está el vector $(2,3)$ en $\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$? Demuestra que el conjunto dado genera todo \mathbb{R}^2

17. Demuestra que $\text{Gen}\{\vec{i}, \vec{j}\} = \mathbb{R}^2$

18. ¿Está el vector $(2,0)$ en $\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$? Demuestra que el conjunto dado no genera todo \mathbb{R}^2

19. Determina $\text{Gen}\{\vec{i}; \vec{k}\}$ en \mathbb{R}^3 (se lee: determina el espacio generado por los versores $\vec{i}; \vec{k}$)

20. Determina si el conjunto dado genera el espacio vectorial indicado y en caso negativo indicar si genera algún sub espacio de V

a) En \mathbb{R}^2 , $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

b) En \mathbb{R}^2 , $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

c) En \mathbb{R}^2 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

d) En $M_{2 \times 2}$

$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

e) En \mathbb{R}^3 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

f) En P_3 , $\{x^3 - 2x + 3, x^2 + 4x\}$

g) En $M_{3 \times 3}$, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

h) En P_2 $\{1 - x, 3 - x^2, x\}$

i) En $M_{2 \times 3}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

21. Muestra que dos polinomios no pueden generar a P_2

22. Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

a. ¿Está \vec{w} en el espacio generado $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\}$?

e. ¿Está \vec{v} en el $\text{Gen}\{\vec{u}; \vec{w}\}$

b. ¿Está \vec{u} en el $\text{Gen}\{\vec{v}; \vec{w}\}$

c. ¿Está \vec{z} en el $\text{Gen}\{\vec{u}\}$

d. ¿Está \vec{z} en el $\text{Gen}\{\vec{v}; \vec{w}\}$

23. a. ¿es cierto que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^2$?

- a. ¿Es verdad que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^2$?
 - b. ¿Es verdad que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{z}\} = \text{Gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}$?
 - c. Compare el $\text{Gen}\{\vec{u}\}$ con el $\text{Gen}\{\vec{z}\}$
 - d. ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
 - e. ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\}$?
 - f. ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
 - g. ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$?
24. Sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$
- a. ¿ \vec{t} está en el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}, \vec{s}\}$?
 - b. ¿ \vec{t} está en el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}\}$?
 - c. ¿ \vec{t} está en el $\text{Gen}\{\vec{r}, \vec{s}\}$?
 - d. Demuestra que el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}, \vec{s}\} = \mathbb{R}^3$
 - e. Demuestra que el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}, \vec{t}\} = \mathbb{R}^3$
 - f. Determina el $\text{Gen}\{\vec{x}, \vec{r}\}$
 - g. Determina el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{t}\}$
25. Supóngase lo siguiente: que si $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$ están en \mathbb{R}^3 . Muestre que si $\vec{v} = \alpha \vec{v}_1$ entonces $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una recta que pasa por el origen.
26. Proponga un conjunto de vectores que genere los EVR indicados y luego verifique lo propuesto
- a. Todos polinomios de tercer grado.
 - b. El conjunto de matrices diagonales de 2×2 .
 - c. El conjunto de vectores en \mathbb{R}^2 .
 - d. El conjunto de vectores en \mathbb{R}^3 .
27. Verificar si son o no linealmente independientes los vectores:
- a. $\vec{u} = (0,0)$
 - b. $\vec{u} = (2,5)$; $\vec{v} = (0,0)$
 - c. $\vec{u} = (1,3)$; $\vec{v} = (2,6)$
 - d. $\vec{u} = (2,5)$; $\vec{v} = (-3,1)$
 - e. $\vec{u} = (2,5)$; $\vec{v} = (-3,1)$; $\vec{w} = (1,0)$
 - f. $\vec{u} = (1,3)$; $\vec{v} = (2,6)$; $\vec{w} = (1,0)$
 - g. $\vec{u} = (0,0,0)$
 - h. $\vec{u} = (1,0,4)$; $\vec{v} = (3,-1,2)$
 - i. $\vec{u} = (-2,6,4)$; $\vec{v} = (-1,3,2)$
 - j. $\vec{u} = (1,2,3)$; $\vec{v} = (1,0,-2)$; $\vec{w} = (-1,0,2)$
 - k. $\vec{u} = (1,0,0)$; $\vec{v} = (0,1,0)$; $\vec{w} = (0,0,1)$
 - l. $\vec{u} = (1,0,0)$; $\vec{v} = (0,1,0)$; $\vec{w} = (0,0,1)$; $\vec{w} = (3,0,-1)$;
28. En el ítem j el conjunto de vectores es LD, pero $(1,2,3)$ no puede expresarse como una combinación lineal de $(1,0,-2)$ y $(-1,0,2)$. ¿Esto no contradice el teorema?

29. Prueba si el conjunto es LI y si genera el espacio o un sub espacio de este

- De polinomios P_2 : $(1 - x; 1 + x; 1 + x^2)$
- $\vec{u} = 2x^2 + 4x + 8$; $\vec{v} = -2x^2 + x + 1$
- De matrices $M_{2 \times 2}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

30. Sea $A = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestra que el conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ es linealmente independiente.

31. Determina los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

- $\{(1, k); (2, 3)\}$
- $\{(1 + k, 1 - k); (1 - k, 1 + k)\}$
- $\{(1, 2, 2); (2, 1, 1); (3, 3, k)\}$
- $\{(1, 1, 1); (k, k, 0); (1, 0, k)\}$

32. Determina k para que el siguiente conjunto $\{x^2 + x + 1, kx^2 + kx, x^2 + k\}$ sea linealmente independiente.

33. Encuentre condiciones sobre a, b, c y d en \mathbb{R} de modo que: $A = \{(a, b), (c, d)\}$ sea LD.

34. Sea $A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ tres vectores cualesquiera de un espacio vectorial. Determina si el conjunto de vectores $\{\vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{w}\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

35. Encuentre condiciones sobre α, β para que $A = \{(1, \beta, 0), (0, 1, \alpha), (2, 1, 1)\}$ sea LI

36. De acuerdo a lo realizado en el ejercicio 22, analiza en cada caso la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsas da un contraejemplo.

- Si \vec{u} es vector no nulo de \mathbb{R}^2 , entonces $\{\vec{u}\}$ es L. D.
- Si \vec{u}, \vec{v} son vectores no nulos de \mathbb{R}^2 , entonces $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es L. D.
- Si $\vec{u} = k\vec{v}$ son vectores no nulos de \mathbb{R}^2 , entonces $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es L. D.
- Si \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son vectores no nulos de \mathbb{R}^2 , entonces $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es L. D.
- Si \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son vectores no nulos de \mathbb{R}^3 , entonces $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ es L. I.
- Si \vec{u}, \vec{v} son vectores no nulos de \mathbb{R}^3 y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es L. D.

37. a. ¿es cierto que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^2$?
- a. ¿Es verdad que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^2$?
- b. ¿Es verdad que el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{z}\} = \text{Gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}$?
- c. Compare el $\text{Gen}\{\vec{u}\}$ con el $\text{Gen}\{\vec{z}\}$
- d. ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
- e. ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$?
- f. ¿Cuál es el $\text{Gen}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$?
38. Supóngase lo siguiente: que si $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$ están en \mathbb{R}^3 . Muestre que si $\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$ entonces $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una recta que pasa por el origen.
39. Proponga un conjunto de vectores que genere los EVR indicados y luego verifique lo propuesto.
- g. Todos polinomios de tercer grado.
- h. El conjunto de matrices diagonales de 2×2 .
- i. El conjunto de vectores en \mathbb{R}^2 .
- j. El conjunto de vectores en \mathbb{R}^3 .

BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

DEFINICIÓN DE BASE

Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ forma una base del espacio vectorial V si :

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes
- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ genera a V

Observación: todo conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n forma una base en R^n .

En R^n se define: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ a esta base se le llama la **base**

“estándar” o base canónica, es la base más simple de utilizar y en la que normalmente están expresados los vectores.

Teorema: si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces toda otra base de V tendrá n vectores. Este teorema es de suma importancia ya que nos dice que cualquier base de un espacio vectorial siempre tiene el mismo número de vectores.

- Los versores $(1, 0), (0, 1)$ generan a R^2 y son linealmente independientes. Luego forman la base estándar para R^2
- Los vectores $(1, 1), (-2, 1)$ generan a R^2 y son linealmente independientes. Luego forman la base estándar para R^2
- El conjunto de vectores $\{(1, 1), (-2, 1), (4, 7)\}$ no es base son linealmente dependientes.
- Los versores $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ generan a R^3 y son linealmente independientes luego forman una base de R^3 .
- Los polinomios $1, x, x^2, x^3$ son linealmente independientes en P_3 . Estos polinomios también generan espacio vectorial P_3 . Por lo tanto, $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para P_3 . En general, $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ constituye una base para P_n . A esta base se le conoce como la **base estándar de P_n**
- El conjunto de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; generan a $M_{2 \times 2}$.

$$\text{Si tenemos que } c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vemos que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Por tanto, estas matrices son linealmente independientes. Así que este conjunto de matrices forma la **base estándar para $M_{2 \times 2}$**

Determina si el conjunto de vectores de \mathbb{R}^3 constituye una base del espacio vectorial dado

- $\vec{u} = \{(-2,0,0); (-3,-1,0); (3,-9,-6)\}$

Solución: planteando la combinación lineal con el vector nulo, para determinar si los vectores son LI

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ -\alpha_2 - 9\alpha_3 \\ -6\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 - 9\alpha_3 = 0 \\ -6\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

despejando $\alpha_3 = 0$, haciendo sustitución hacia atrás $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 0$. Los vectores son LI, y como el número de vectores es igual a la dimensión del espacio, se puede asegurar que generan todo \mathbb{R}^3 , luego constituyen una base de \mathbb{R}^3

BASE PARA UN SUBESPACIO DE \mathbb{R}^3

Teorema: Sea H un subconjunto de vectores del espacio vectorial V de dimensión n:

- Si H contiene menos n vectores, entonces no genera a V, sino a un subespacio de V
- Si H contiene más de n vectores, es L.D. y genera a V
- Si H contiene exactamente n vectores y es linealmente independiente o genera a V, **entonces es una base para V.**

- Determina si los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ forman una base en \mathbb{R}^3 o de un subespacio de pero sí de un subespacio de \mathbb{R}^3 ya que existen vectores en \mathbb{R}^3 que no se pueden expresar como combinación lineal de estos dos vectores

Para ver que generan estos dos vectores hacemos la combinación lineal con el vector genérico

$$c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) = (x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \quad \text{condición } z = 0 \text{ (Plano "xy")}$$

El conjunto solución será $S = \{x, y, 0\}$ genera un plano, de acuerdo al teorema si el espacio vectorial tiene dos vectores entonces la base siempre debe contener el mismo número de vectores

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL Un espacio vectorial es de dimensión n si existe una base que consta de exactamente n vectores

Notación: Representamos la dimensión de V por $\dim V = n$.

Teorema: si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces toda otra base de V tendrá n vectores. La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores en la base de V .

Como los n vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n generan a \mathbb{R}^n y forman una base en \mathbb{R}^n , entonces

- ✓ $\dim \mathbb{R}^n = n$
- ✓ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ pues $\{(1, 0), (0, 1)\}$ forman base en \mathbb{R}^2
- ✓ $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ pues $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ forman base en \mathbb{R}^3
- ✓ $\dim \{0\} = 0$, ya que $\{0\}$ no tiene base, 0 no es l.i, V es de **dimensión cero**
- ✓ El conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ constituye una base para P_n . Por tanto, $\dim P_n = n + 1$
- ✓ $\dim M_{2 \times 2} = 2 \cdot 2 = 4$, pues el siguiente conjunto de matrices constituyen la base de

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V . Entonces H tiene dimensión finita y

$$\dim H \leq \dim V$$

Los subespacios en \mathbb{R}^3 , pueden ser cuatro el $H = \{0\}$, $\dim H = 1$, $\dim H = 2$, $\dim H = 3$. Si $\dim H = 3$ entonces H tiene tres vectores LI y generan todo \mathbb{R}^3 , por lo tanto, la única manera de obtener un subespacio propio de \mathbb{R}^3 es teniendo $\dim H = 1$, $\dim H = 2$. Si $\dim H = 1$, entonces H tiene una base que consiste en un solo vector que genera a ese subespacio, que será la ecuación de una recta que pasa por el origen. Si la $\dim H = 2$ entonces la base tendrá dos vectores que generen ese subespacio el cual será un plano

Analiza si el vector $(1, 2, 0)$ forma una base \mathbb{R}^3 o en un subespacio de \mathbb{R}^3 . Halla una base y la dimensión

Solución: **NO** forma una base en \mathbb{R}^3 , ya que el número de vectores es inferior a la dimensión de espacio.

Haciendo la combinación lineal con el vector genérico

$$c_1(1, 2, 0) = (x, y, z) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 2 & y \\ 0 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & 2x - y \\ 0 & z \end{array} \right)$$

el conjunto solución será $S = \{x, 2x, 0\}$ como tiene una sola variable libre, la base canónica será

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \text{ para encontrar otras bases, le damos a "x" cualquier valor o a } c_1, \text{ la } \dim H = 1, \text{ porque}$$

la base tiene un solo vector

Determina una base y la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^3 $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$

Solución: Es un plano que tiene dos variables libre x e y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a H , como además se trata de un conjunto de vectores

linealmente independientes entonces $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de H , la $\dim H = 2$ porque la base tiene dos vectores

¿Pueden $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}; B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ser también bases del subespacio H ?

Determina una base para el subespacio de todas las matrices simétricas de $M_{2 \times 2}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera las matrices simétricas, como además son linealmente independientes constituyen una base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ para el subespacio $M_{2 \times 2}$

Encontrar una base para el espacio de solución S del SELH $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$y = -z \wedge x = -3z$$

Todas las soluciones serán de la forma $S = \{-3z, -z, z\}$. Así que una base para S será

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \dim S = 1$$

TRABAJO PRACTICO BASE y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

1. Verifica si forman una base del espacio vectorial . En caso de que no, analiza que subespacio generan

I. ¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos de vectores forman una base en \mathbb{R}^2 o en un subespacio de \mathbb{R}^2 ?

- a. $\{(1, 3), (1, -1)\}$
- b. $\{(0, 0)\}$
- c. $\{(1, 2)\}$
- d. $\{(1, 2), (2, -3), (0, 0)\}$
- e. $\{(1, 3), (-2, 6)\}$
- f. $\{(1, 3), (0, 0)\}$

II. ¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos de vectores forman una base en \mathbb{R}^3 o en un subespacio de \mathbb{R}^3 ?

- a. $\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$
- b. $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$
- c. $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 0, 0)\}$
- d. $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 3, 0)\}$
- e. $\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\}$

III. ¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos de polinomios forman una base en P_2

- a. $\{-x^2 + x + 2, 2x^2 + 2x + 3, 4x^2\}$
- b. $\{3x^2 + 2x + 1, x^2 + x + 1, x^2 + 1\}$
- c. $\{1+2x, 2-x, x\}$
- d. $\{2x + 1, x^2\}$

IV. ¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos de matrices forman una base en $M_{2 \times 2}$ o en un subespacio de $M_{2 \times 2}$?

- a. $V = M_{2 \times 2} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \right\}$
- b. $V = M_{2 \times 2} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

2. Determina los valores de k para los cuales B es una base de $M_{2 \times 2}$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3. Halla el subespacio H de $M_{2 \times 2}$ generado por el conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

- a. Encuentra una base y la dimensión de H
- b. En cada uno de los siguientes casos, analice si existe $k \in \mathbb{R}$ para que la matriz dada pertenezca a H.

$$\text{i. } M = \begin{bmatrix} 3 & k-1 \\ 2k+1 & 3k \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 5 & k+1 \\ 2k & 3-k \end{bmatrix} \quad 4.$$

4. Dados los Espacios Vectoriales indicados, encuentra la dimensión y una base no estandar para cada uno:

- \mathbb{R}^3
- $D_{2 \times 2}$ (matrices diagonales)
- $H_1 = \{(a_0 + a_1x + a_2x^2) \in P_2 : P_0 = 0\}$
- $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + z = 0\}$
- $H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = -t, z = 0\}$
- $S_{2 \times 2}$ (matrices simétricas)
- $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ b & a-b \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2} \right\}$
- $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2} : d + b = 0 \text{ y } c + d = 0 \right\}$
- El plano "xy"

5. Dados los vectores de \mathbb{R}^4

$$\vec{u} = (1, 0, 0, 1) \quad \vec{v} = (0, 1, 2, 1) \quad \vec{w} = (6, -1, -2, k^2 + 1) \quad \vec{z} = (-1, 1, k, 0)$$

- Determine los valores de k para los cuales los vectores dados generan un subespacio de dimensión 2. Para alguno de los valores de k hallados encuentre una base del subespacio generado.

6. Halla las ecuaciones paramétricas del subespacio

- Determina una base del subespacio
- Indica la dimensión
- Expresa el vector $(-2, 5, -2, 4); (1, 3, -2)$ y $(5, 4, 1)$ en dichas bases para los respectivos subespacios

$$i. \begin{cases} 3x - y + w = 0 \\ x - 2y + 3w = 0 \end{cases} \quad i. i. \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad i. i. i. \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ 3x + 7z = 0 \end{cases} \quad \text{Determina la ecuación del subespacio Vectorial de } \mathbb{R}^3 \text{ que tiene por base } \{(1, 1, -2), (-1, 2, -1)\}$$

7. Respecto a una base \mathbb{R}^5 , los subespacios A y B están dados por

$$A = \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad B = \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a - 2b \\ x_3 = a + b \\ x_4 = a - b \\ x_5 = b \end{cases}$$

- Halla una base y la dimensión para A
- Halla una base y la dimensión para B.

MATRIZ DE COORDENADAS - CAMBIO DE BASE

Muchas de las aplicaciones del álgebra lineal a la física, ingeniería, ciencias sociales, etc., pueden formularse de manera sencilla si se elige el sistema de coordenadas apropiado. Esta transformación se consigue por medio de un cambio de variables. También, los problemas de espacios vectoriales pueden simplificarse eligiendo una base adecuada.

Teorema: Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V , entonces para cada $\vec{v} \in V$, existen escalares únicos c_1, c_2, \dots, c_n tales que $\vec{v} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$. La existencia es debida a que una base de n vectores de \mathbb{R}^n es generadora del espacio y la unicidad es por el hecho de que la base es un conjunto linealmente independiente, por lo tanto tiene solución única. Estos escalares únicos se

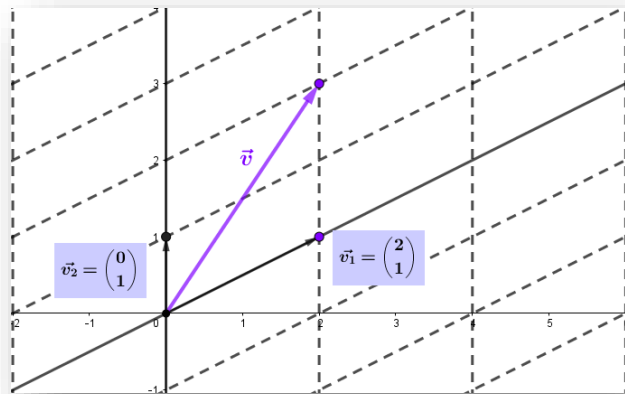
denominan **Matriz de coordenadas de \vec{v} con respecto a la base B** y se escribe $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

- Si $B_1 = \{(2,1), (0,1)\}$ y $\vec{v} = (2,3)$ haciendo la proyección sobre los vectores de la base se puede encontrar gráficamente la matriz de coordenadas del vector en la B

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 1 \vec{v}_1 + 2 \vec{v}_2$$

$$[\vec{v}]_{B_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



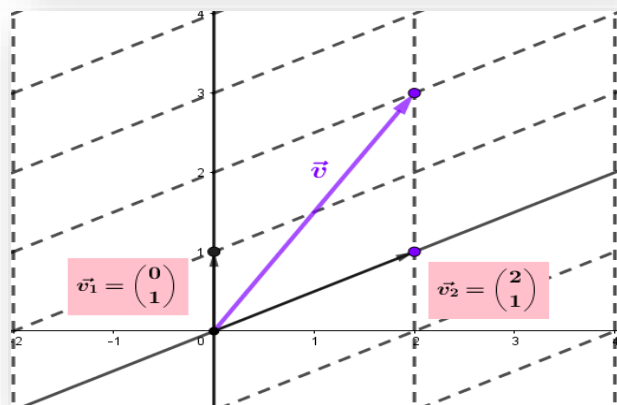
- Si se invierten los vectores de la base, ¿la matriz de coordenadas será la misma?

Si $B_2 = \{(0,1), (2,1)\}$ y $\vec{v} = (2,3)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 2 \vec{v}_1 + 1 \vec{v}_2$$

$$[\vec{v}]_{B_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Es decir, $[\vec{v}]_B$ no solo cambia cuando la base cambia, también depende del orden de los elementos en B . Por lo tanto, para definir con precisión las coordenadas de un vector \vec{v} con respecto a una base B , pediremos que la base B sea una base ordenada.

Obtén la matriz de coordenadas del polinomio $P(x) = 1 + 2x + 3x^2$ con respecto a cada una de las siguientes bases:

a) La base canónica de $B_s = \{1, x, x^2\}$

Solución: siendo $\vec{v}_1 = 1$, $\vec{v}_2 = x$, $\vec{v}_3 = x^2$ se debe cumplir $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 = c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2)$$

Analizando las componentes homólogas, la matriz de coordenadas de P son los escalares c_1, c_2, c_3

$$[P]_{B_s} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) $B_1 = \{1 + x, 1 - x^2, 1 + x + x^2\}$

Solución: se debe cumplir $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$

$$c_1(1 + x) + c_2(1 - x^2) + c_3(1 + x + x^2) = 1 + 2x + 3x^2$$

$$(c_1 + c_2 + c_3) + (c_1 + c_3)x + (-c_2 + c_3)x^2 = 1 + 2x + 3x^2$$

Igualando las componentes homólogas

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_3 = 2 \\ -c_2 + c_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \text{en forma matricial} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial se puede resolver haciendo operaciones entre renglones con la matriz aumentada, tendremos que la matriz de coordenadas de P en la B_1 será

$$[P]_{B_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determina la matriz de coordenadas de $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ respecto de las siguientes bases:

a) La base estándar $B_s = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ donde

$$v_1 = E_{11} \quad v_2 = E_{12} \quad v_3 = E_{21} \quad v_4 = E_{22}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Realizando la suma de las matrices e igualando las componentes que se encuentran en el mismo lugar

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A]_{B_s} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) La base $B_1 = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4\}$ en la que

$$v'_1 = -E_{21} \quad v'_2 = E_{22} \quad v'_3 = -E_{12} \quad v'_4 = E_{11}$$

Solución:

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Realizando la suma de las matrices

$$\begin{bmatrix} c_4 & -c_3 \\ -c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Las componentes de la matriz de coordenadas serán los escalares c_1, c_2, c_3, c_4

$$[A]_{B_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinación de la matriz de coordenadas de un vector por el método de matriz inversa

Considerando una base no estándar en \mathbb{R}^n : $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n\}$ queremos encontrar la matriz de coordenadas de un vector \vec{v} en la nueva base B_1 , pero resuelto por inversión de matrices

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n$$

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 \dots c_n \vec{v}_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix} \dots c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \text{ haciendo las operaciones queda un}$$

SEL

$$\begin{cases} a_{11}c_1 & \dots & a_{1n}c_n = x_1 \\ a_{12}c_1 & \dots & a_{2n}c_n = x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}c_1 & \dots & a_{nn}c_n = x_n \end{cases} \text{ y en forma matricial } \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

\downarrow B_1 \downarrow $[\vec{v}]_1 = [\vec{v}]$ \downarrow

siendo

B_1 matriz cuadrada formada por los vectores de la base uno

$[\vec{v}]_1$ matriz de coordenadas de \vec{v} en B_1

$[\vec{v}]$ matriz de coordenadas del vector en base estándar

Pre multiplicando en ambos miembros (1) por B^{-1}

$$B_1^{-1} B_1 [\vec{v}]_1 = B_1^{-1} [\vec{v}]$$

$$I [\vec{v}]_1 = B_1^{-1} [\vec{v}]$$

$$[\vec{v}]_1 = B_1^{-1} [\vec{v}]$$

Obtén las coordenadas del vector $\vec{v} = (5, -1, 9)$ con respecto a la base $B = \{(1, 2, 1); (2, 9, 0); (3, 3, 4)\}$

Solución: $(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1 \\ c_1 + 4c_3 = 9 \end{cases} \rightarrow \text{en forma matricial} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por inversión de matrices

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

La matriz de coordenadas del vector en la base B será:

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

CAMBIO DE BASE

Cuando se trabaja con más de un sistema de coordenadas es necesario conocer la relación entre las coordenadas del vector y los distintos sistemas.

CAMBIO DE BASE ESTÁNDAR A OTRA BASE

Hallar la matriz de cambio de base hacia una base estándar es sencillo y puede hacerse por simple inspección. Encontrar la matriz de cambio de base desde una base estándar es casi igual de sencillo, pero requiere calcular una matriz inversa

Si $B_s = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es la base estándar, $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ una base cualquiera y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vector de \mathbb{R}^2 .

La matriz de coordenadas del vector \vec{v} en base estándar se realiza resolviendo $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \Rightarrow [\vec{v}]_s = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Una manera de hallar la matriz de coordenadas del vector \vec{v} en base B_1 se obtiene haciendo

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{en forma matricial} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 [\vec{v}]_1 = [\vec{v}]_s$$

operando con las matrices resulta $[\vec{v}]_1 = B_1^{-1}[\vec{v}]_s$ que para nuestro ejemplo sería:

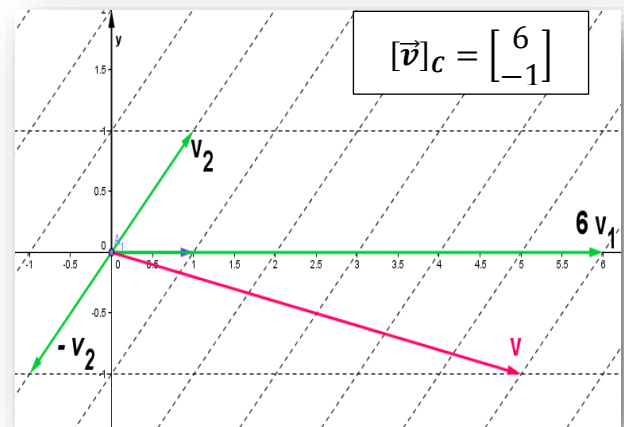
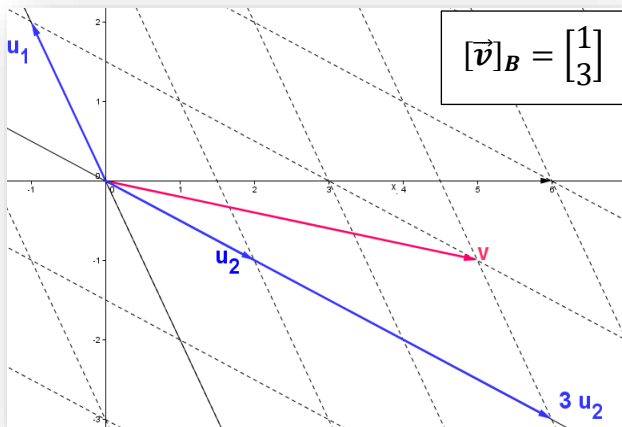
$$[\vec{v}]_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{u}_1 + \frac{5}{3}\vec{u}_2$$

MATRICES DE CAMBIO DE BASE – MATRIZ DE TRANSICIÓN

Iniciaremos el estudio con un ejemplo en \mathbb{R}^2 . La fig. 1 muestra el sistema coordenado relacionado con la Base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y la fig 2 el sistema coordenado respecto de la base $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y el mismo vector $\vec{v} = (5, -1)$ con relación a cada sistema coordenado

$$\text{Sean } B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

Se puede ver en ambas figuras la matriz de coordenadas de ambos vectores



Resulta que existe una conexión directa entre los dos vectores coordenados. Una manera de encontrar la relación es utilizar $[\vec{v}]_B$ para calcular \vec{v}

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces se puede encontrar $[\vec{v}]_C$ si expresamos $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = 6\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad [\vec{v}]_C = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sin embargo existe una mejor manera de resolver este tipo de problemas, mediante el cálculo de una matriz.

Mediante la utilización de las bases $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, encuentra $[\vec{v}]_C$

Solución: sabemos que $\vec{v} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ al expresar \vec{u}_1 y \vec{u}_2 , en términos de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , obtendremos las coordenadas de \vec{v} con respecto a la base C. Así,

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad [\vec{u}_1]_C = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad [\vec{u}_2]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 = -3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3(3\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{v} = 6\vec{v}_1 - 1\vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad [\vec{v}]_C = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Este método puede no parecer más fácil que el realizado anteriormente, pero tiene una gran ventaja, se pueden encontrar $[\vec{v}]_C$ de $[\vec{v}]_B$ para cualquier vector \vec{v} en \mathbb{R}^2 , con muy poco trabajo adicional.

Examinemos los cálculos que se hicieron. De $\vec{v} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ (vector expresado en la Base B), lo queremos llevar a la base C

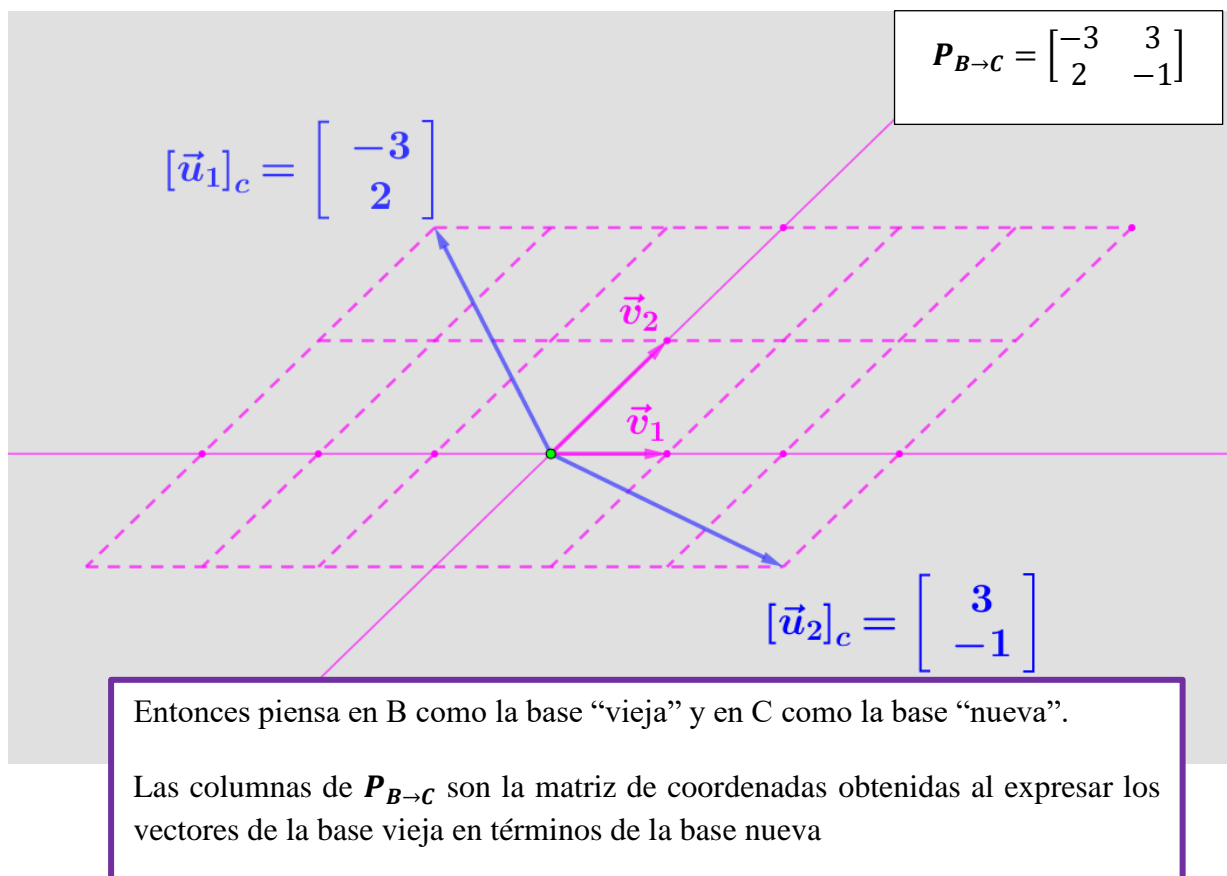
$$[\vec{v}]_C = [\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2]_C = [\vec{u}_1]_C + 3[\vec{u}_2]_C$$

$$[\vec{v}]_C = [[\vec{u}_1]_C \quad [\vec{u}_2]_C] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{v}]_C = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{v}]_C = P_{B \rightarrow C} [\vec{v}]_B$$

$P_{B \rightarrow C}$ es la **Matriz de Transición** de la base B a la base C, cuyas columnas son $[\vec{u}_1]_C$ y $[\vec{u}_2]_C$



Definición: Sean $B = \{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n\}$ y $C = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V. La matriz de $n \times n$ cuyas columnas son los vectores coordenados $[\vec{u}_1]_C \dots [\vec{u}_n]_C$ de los vectores de la base B con respecto a C se denota mediante $P_{B \rightarrow C}$ y es la llamada **Matriz De Transición** o **Matriz De Cambio De Base** de B a C.

$$P_{B \rightarrow C} = [[\vec{u}_1]_C \quad [\vec{u}_2]_C \quad \dots \quad [\vec{u}_n]_C]$$

Teorema: Sean $B = \{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n\}$ y $C = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$ bases para un espacio vectorial V y $P_{B \rightarrow C}$ la matriz de cambio de base de B a C. Entonces:

- a) $P_{B \rightarrow C} [\vec{v}]_B = [\vec{v}]_C$ para todo $\vec{v} \in V$
 b) $P_{B \rightarrow C}$ es invertible $(P_{B \rightarrow C})^{-1}$

Demostración: a) Sea $\vec{v} \in V$ y sea

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

es decir: $[\vec{v}]_C = [c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_n \vec{u}_n]_C$

$$[\vec{v}]_C = c_1 [\vec{u}_1]_C + \dots + c_n [\vec{u}_n]_C$$

$$[\vec{v}]_C = [[\vec{u}_1]_C \dots [\vec{u}_n]_C] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$[\vec{v}]_C = P_{B \rightarrow C} [\vec{v}]_B$$

- b) En razón de que $[\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n]$ es linealmente independiente en V , el conjunto $[[\vec{u}_1]_C \dots [\vec{u}_n]_C]$ será linealmente independiente en \mathbb{R}^n , por lo tanto $P_{B \rightarrow C} = [[\vec{u}_1]_C \dots [\vec{u}_n]_C]$ es invertible.

Para todo $\vec{v} \in V$, tenemos que $P_{B \rightarrow C} [\vec{v}]_B = [\vec{v}]_C$.

Si resolvemos para $[\vec{v}]_B = (P_{B \rightarrow C})^{-1} [\vec{v}]_C$

Por lo tanto

$$(P_{B \rightarrow C})^{-1} = P_{C \rightarrow B}$$

MÉTODO DE MATRIZ INVERSA PARA CALCULAR LA MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

Los segundos miembros de estas igualdades son la matriz de coordenadas del vector en base estándar, igualando los segundos miembros se tiene

$$\begin{cases} B[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_s \\ C[\vec{v}]_C = [\vec{v}]_s \end{cases} \rightarrow B[\vec{v}]_B = C[\vec{v}]_C$$

Si $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es otra base cualquiera y $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ la matriz de coordenadas de \vec{v} respecto de la base B . Obtener $[\vec{v}]_s$ y $[\vec{v}]_C$

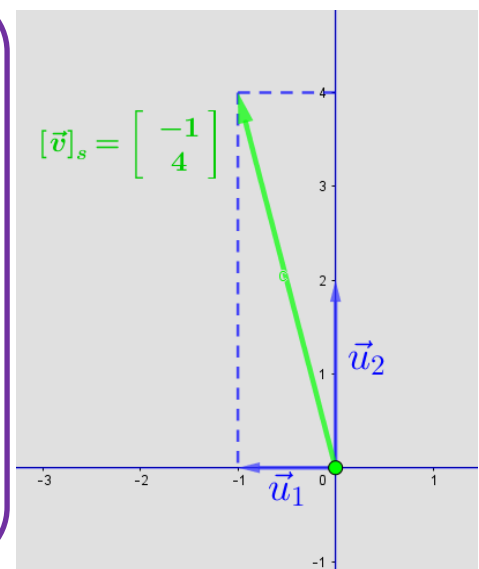
Solución:

$$B[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_s$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por combinación lineal sería

$$\vec{v} = 1\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Para determinar la matriz de coordenadas del vector \vec{v} en base C, utilizamos la expresión

$$B[\vec{v}]_B = C[\vec{v}]_C$$

Premultiplicando ambos miembros por C^{-1}

$$C^{-1}B[\vec{v}]_B = C^{-1}C[\vec{v}]_C$$

$$C^{-1}B[\vec{v}]_B = \mathbf{I}[\vec{v}]_C$$

$$\rightarrow [\vec{v}]_C = C^{-1}B[\vec{v}]_B \rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\vec{v}]_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow [\vec{v}]_C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix} \rightarrow [\vec{v}]_C = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

La matriz que resulta del producto de las matrices $C^{-1}B$ es la **MATRIZ DE TRANSICIÓN** o **MATRIZ DE PASO** de la base B a la base C

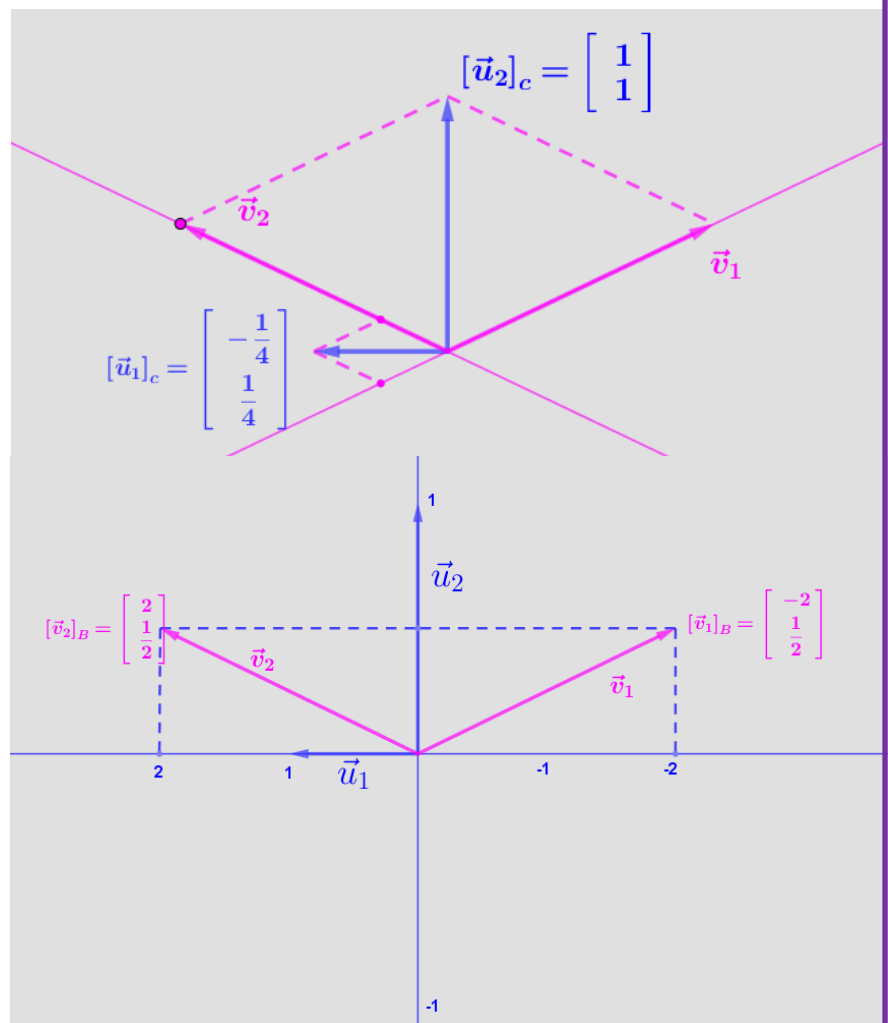
$$P_{B \rightarrow C} = C^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz permite un cambio de base B a otra base C, para cualquier vector del espacio vectorial considerado

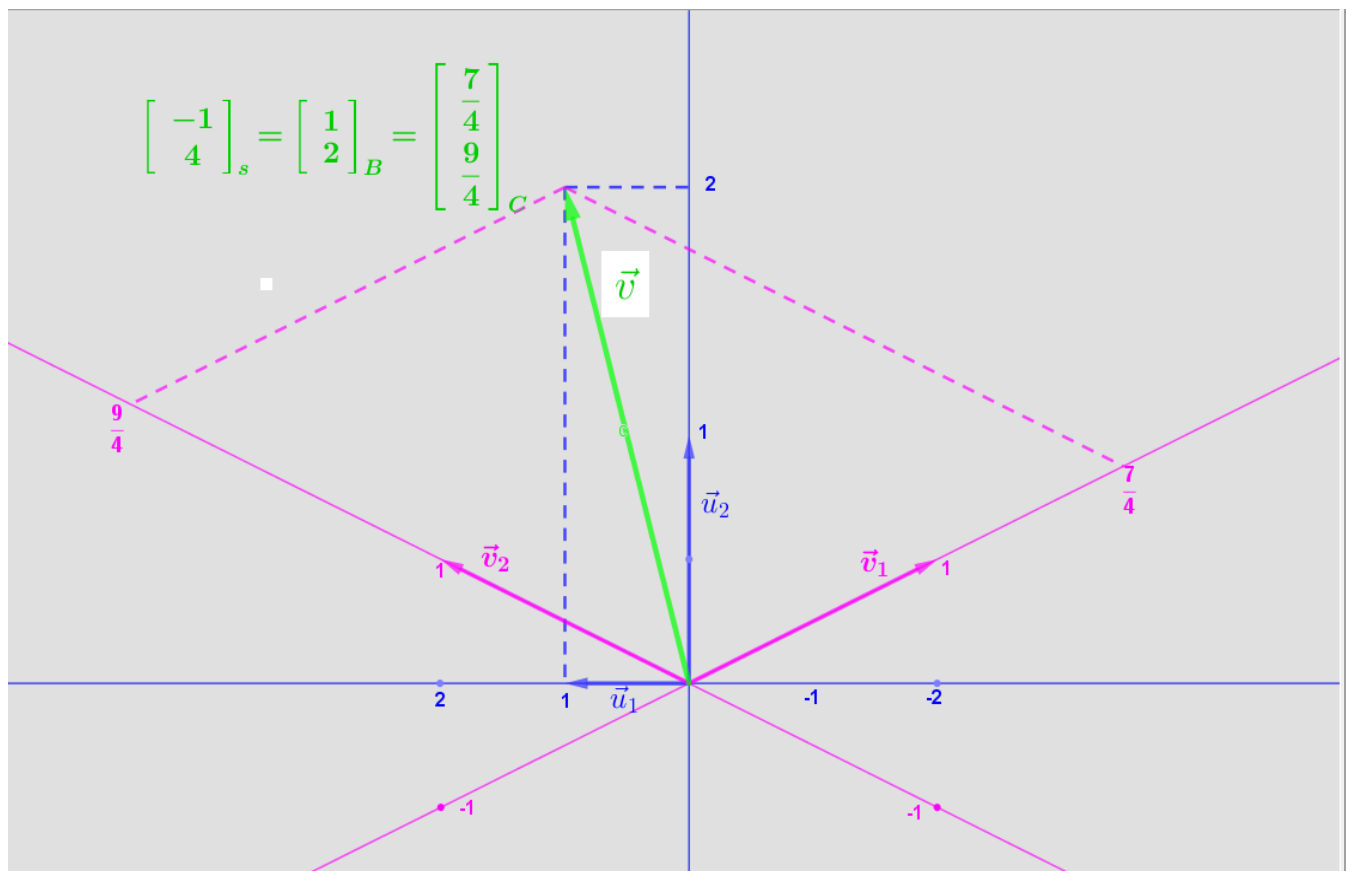
Con un proceso similar se obtiene la matriz de transición de la base C a la base B

$$P_{C \rightarrow B} = B^{-1}C$$

$$P_{C \rightarrow B} = B^{-1}C = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



MATRIZ DE COORDENADAS DEL VECTOR \vec{v} EN TODAS LAS BASES



Observación: para cualquier base, el vector \vec{v} tiene la misma dirección y magnitud con respecto a los ejes coordenados cartesianos.

TRABAJO PRÁCTICO: MATRIZ DE COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE

1. Para las siguientes bases no estándar de \mathbb{R}^2 y los vectores dados, encuentra las matrices de coordenadas en cada base y representa cada ítem en sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{c. } B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{b. } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \end{array}$$

2. ¿Qué características geométricas puede observarse en las bases B_2 y B_3 ? ¿Qué resultado obtiene si se realiza el producto escalar de los vectores de cada base?

3. Dados los siguientes vectores de los correspondientes Espacios Vectoriales, obtén la matriz de coordenadas en la base indicada:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \vec{v} = (1,0,5) \text{ de } \mathbb{R}^3; B_1 = \{(0,0,1), (1,0,1), (1,2,0)\} \\ \text{b. } p(x) = 5 - 2x^2 \text{ de } P^2; B_2 = \{x^2, x, 1 + 2x^2\} \\ \text{c. } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ de } M_{2 \times 2}; B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$$

4. Si $\vec{v} = (1,0,2)$ es un vector del Espacio Vectorial definido por el plano $\pi: 2x + 5y - z = 0$ se pide encontrar una Base B_1 para dicho V y la matriz de coordenadas $[\vec{v}]_1$

5. Una empresa hormigonera produce 3 mezclas básicas dadas en la siguiente tabla:

	A	B	C
Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15
Grava	10	5	15
Tobas	0	2	8

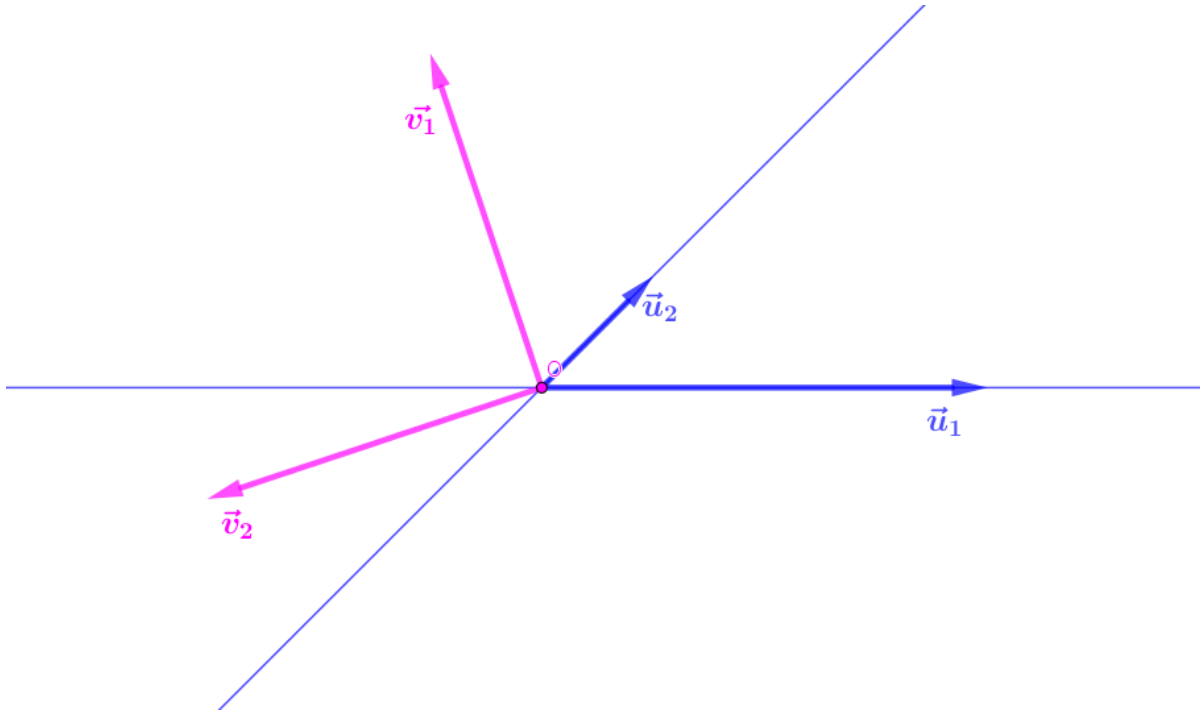
Las cantidades se miden en gr y cada unidad de mezcla pesa 60 gr.

Le requieren a la empresa mezclas especiales resolviendo combinaciones de las 3 mezclas básicas, pensando en Espacios Vectoriales se diría que las mezclas especiales pertenecen al Espacio Vectorial generado por los 3 vectores mezclas básicas; entonces ¿Puede obtenerse un vector mezcla especial que consiste en 1000 gr de cemento, 200gr de agua, 1000gr de arena, 500gr de grava y 300 gr de piedras tobas?

Si esto es posible; ¿cuántas unidades de cada mezcla se necesitan para formar este vector mezcla especial? y ¿qué representa esta terna ordenada de unidades en lenguaje de Espacios Vectoriales?

6. En \mathbb{R}^2 se conocen las bases $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ y $C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y el vector $\vec{u} = (2, 4)$. Se pide obtener las matrices de coordenadas del vector \vec{u} en las dos bases no estándar. Representa gráficamente las bases y el vector en dichas bases

7. Siendo las bases $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, encontrar gráficamente la matriz de transición de C a B $P_{C \rightarrow B}$, calcula e interpreta geoméricamente $(P_{C \rightarrow B})^{-1}$



8. Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $C = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bases para un espacio vectorial V y supón que $\vec{u}_1 = 6\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = 9\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2$

- Encuentra la matriz de cambio de base de B a C
- Encuentra la matriz de coordenadas $[\vec{v}]_C$ para $\vec{v} = -3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2$

9. En \mathbb{R}^2 se conocen las bases $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y la matriz de coordenadas del vector $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. ¿Es posible obtener $[\vec{v}]_C$?

- Obtén la matriz de transición o de paso $P_B \rightarrow C$
- Resuelve gráficamente el problema

10. Dadas las bases $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $[\vec{v}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Encuentra la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2
- Encuentra la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1
- Obtén la matriz de coordenadas del vector \vec{v} en base B_2 ; en la estándar y en la base B_1
- En un mismo gráfico, representa el vector estándar en ambas bases, ¿qué puedes observar?

11. En P^3 se tiene el polinomio $q(x) = 2 - 3x + x^3$, se pide:

- Halla una base estándar de P^3 y otra base no estándar

b. Obtén la matriz de coordenadas de $q_{(x)}$ en la nueva base

c. Verifica por cambio de la nueva base a la base estándar que la matriz de coordenadas de $q_{(x)}$ en

base estándar es $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. En \mathbb{R}^3 se da $B_1 = \{(0,0,1), (1,0,1), (1,0,0)\}$, $B_2 = \{(1,0,1), (0,0,1), (1,1,1)\}$ y $[\vec{v}]_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se pide: $[\vec{v}]_1$ y $P_{B_1 \rightarrow B_2}$

13. En \mathbb{R}^2 se conocen una base $A = \{(4,0), (-2,6)\}$, y $P_{B \rightarrow A} = \{(1,0), (-2,-3)\}$. ¿Es posible obtener la base B?

a. Si es afirmativa la respuesta encuentra B

14. Sea B_1 y B_2 bases de un espacio vectorial V y sea P la matriz de transición de B_1 a B_2 ; muestre que P^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1 .

15. Dada $P_{B_S \rightarrow C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ matriz de transición de la base estándar B_S a una base C en \mathbb{R}^2 ,

a) Obtén el vector $\vec{v} = (-4,3)$ en términos de la nueva base C para $\theta = \frac{\pi}{6}$

b) Grafica las bases y el vector

c) ¿ $P_{C \rightarrow B_S}$ es idéntica a la base C? Explica por qué

TRANSFORMACIONES LINEALES

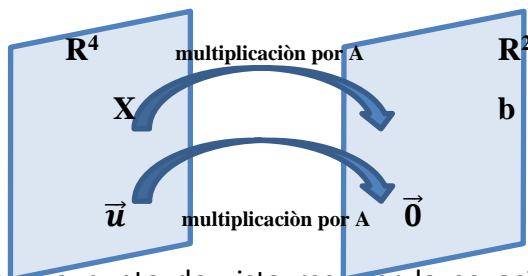
INTRODUCCIÓN A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

La diferencia entre una ecuación matricial $AX = b$ y la ecuación $a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3, \dots, a_n \vec{v}_n = b$ es sólo una cuestión de notación. Sin embargo, en álgebra lineal es posible encontrar una ecuación matricial $AX = b$ que no esté directamente relacionada con combinaciones lineales de vectores. Esto sucede cuando se piensa en la matriz A como un objeto que “actúa” sobre un vector \vec{v} multiplicándolo para producir un nuevo vector $A \vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$
 $\qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$
 $A \qquad X \qquad b \qquad \qquad \qquad A \qquad \vec{v} \qquad \vec{0}$

Se puede observar que la multiplicación por A transforma a X en b y transforma a \vec{v} en el vector nulo $\vec{0}$



Desde este nuevo punto de vista resolver la ecuación $AX = b$ equivale a encontrar todos los vectores X en \mathbb{R}^4 que se **transforman** en el vector b en \mathbb{R}^2 como resultado de la “acción” de la multiplicación por A .

Una **transformación** (o **función**, o **mapeo**) T de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m es una regla que asigna a cada vector X en \mathbb{R}^n un vector $T(X)$ en \mathbb{R}^m . El conjunto \mathbb{R}^n se llama **dominio** de T , y \mathbb{R}^m se llama **codominio** de T . La notación

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ indica que el dominio de T es \mathbb{R}^n y que el codominio es \mathbb{R}^m

TRANSFORMACIONES LINEALES

DEFINICIÓN: Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $\vec{v} \in V$ un vector único $T(\vec{v}) \in W$ y que satisface, para cada \vec{u} y \vec{v} en V y cada escalar c , las siguientes condiciones:

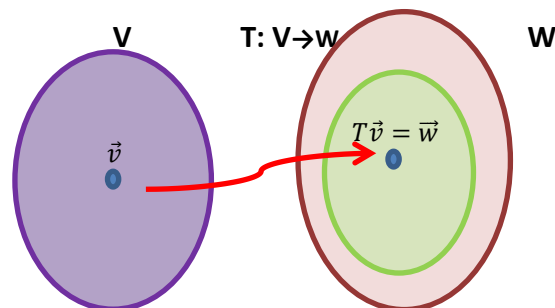
a) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

b) $T(c \vec{v}) = c T(\vec{v})$

Es decir, T es lineal si preserva las dos operaciones definidas dentro del espacio vectorial: suma de vectores y multiplicación de un escalar por un vector. La propiedad a) dice que el resultado de sumar \vec{u} y \vec{v} en V y después aplicarle T , es lo mismo que primero aplicar T a \vec{u} y \vec{v} y luego sumar $T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ en W .

Notación: se escribe $\mathbf{w} = T(\vec{v})$ o $T: V \rightarrow W$ para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W , esto es, T es una función con V como su dominio y un subconjunto de W como su imagen.

Al igual que las funciones tradicionales, las transformaciones tienen tres partes esenciales para existir: el dominio, el codominio, y la regla de asignación, como se observa en la figura:



El dominio es el espacio vectorial V al cual se le aplicará la transformación; el codominio es el espacio W al cual pertenece el resultado de aplicar la transformación, la regla de asignación T es la forma en la cual se debe manipular un elemento de V para convertirlo en un elemento de W ; finalmente, $T(\vec{v})$ es el recorrido de la transformación, y es el subconjunto de W obtenido a partir de la aplicación de la transformación a cada elemento de V

Siendo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ analiza la linealidad de $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\vec{u} + \vec{v}) &= T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\vec{u}) + T(\vec{v}) &= T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ Se verifica la 1ra. condición por lo tanto es lineal

Para probar la segunda condición $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$

$$T \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{pmatrix} = cT \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} cx_1 + cy_1 \\ cy_1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ Se verifica la segunda condición}$$

En la transformación $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$ se observa fácilmente que cualquier elemento de V se convierte en uno de W , tras aplicársele la transformación. Por ejemplo si $\vec{v} = (2,3)$ al aplicarle la transformación T , se obtiene: $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Analiza la linealidad de $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (y, x+2)$

Solución: Se deben verificar las dos condiciones de la definición:

$$\vec{u} = (x_1, y_1) \quad \vec{v} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2)$$

$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (y_1, x_1 + 2) + (y_2, x_2 + 2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 4)$$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

No se verifica esta condición, entonces la transformación no es lineal.

Dada la transformación $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$ halla: a) el vector transformado de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. b) Representar gráficamente el vector y su transformado. c) si $c = 2$ verificar que la transformación es lineal

Solución: a) $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$a) \quad T\left(2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 2T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sean los espacios vectoriales $V = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación $T: V \rightarrow W$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a+1, b+c, 0)$.

Se observa que cualquier elemento de V se convierte en un elemento de W , tras aplicársele la transformación T , por ejemplo si $\vec{v} = -2x^2 + x - 2$ al aplicarle la transformación T , se obtiene:

$$T(-2x^2 + x - 2) = (-2+1, 1-2, 0) = (-1, -1, 0)$$

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Teorema: Sea T una transformación lineal de V en W , donde \vec{u} y \vec{v} están en V y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son escalares. Entonces, las propiedades siguientes son verdaderas (Grossman 6ta edición pág. 472)

i. $T(0) = 0$

ii. $T(\vec{u} - \vec{v}) = T\vec{u} - T\vec{v}$

iii. $T(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) = \alpha_1 T\vec{v}_1 + \alpha_2 T\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n T\vec{v}_n$

Nota: en la parte i) el 0 de la izquierda es el vector cero en V, mientras que el cero de la derecha es el 0 en W

i. $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$. Así

$$0 = T(0) - T(0) = T(0) + T(0) - T(0) = T(0)$$

ii. $T(\vec{u} - \vec{v}) = T[\vec{u} + (-1)\vec{v}] = T\vec{u} + T[(-1)\vec{v}] = T\vec{u} + (-1)T\vec{v} = T\vec{u} - T\vec{v}$

(ver la demostración del item iii en la bibliografía sugerida por la cátedra)

Observación: las transformaciones lineales están completamente determinadas por el efecto sobre los vectores de la base

El teorema indica que si $T : V \rightarrow W$ tiene dimensión finita, entonces sólo es necesario conocer el efecto que tiene T sobre los vectores de la base en V. Por lo tanto si se conoce la imagen de cada vector estándar se puede determinar la imagen de cualquier vector en V. Para ver eso, sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ una base en V, y sea \vec{v} otro vector en V. Entonces

$$T \vec{v} = \alpha_1 T \vec{v}_1 + \alpha_2 T \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n T \vec{v}_n$$

Así, se puede calcular $T \vec{v}$ para cualquier $\vec{v} \in V$ si se conocen $T \vec{v}_1, T \vec{v}_2 \dots \dots T \vec{v}_n$

Si se conoce el efecto de una transformación lineal sobre los vectores de la base canónica, se conoce el efecto sobre cualquier otro vector

Dada una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (2, -1, 4)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 5, 2)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$$

Determina $T(2, 3, -2)$

Solución: como $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , existen escalares únicos tal que $(2, 3, -2)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base

$$(2, 3, -2) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1)$$

entonces aplicando la propiedad iii) se puede usar para escribir

$$T(2, 3, -2) = 2T(1, 0, 0) + 3T(0, 1, 0) - 2T(0, 0, 1)$$

$$T(2, 3, -2) = 2(2, -1, 4) + 3(1, 5, 2) - 2(0, 3, 1)$$

$$T(2, 3, -2) = (7, 7, 0)$$

Decide si existe una transformación lineal T que satisfaga las condiciones dadas en caso afirmativo encontrar la expresión analítica de T

CASO 1: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución: $B = \{(-1, 2), (1, -1)\}$ es base de \mathbb{R}^2 ya que generan todo \mathbb{R}^2 y son LI, por lo tanto existe una única TL

$$\alpha_1(-1, 2) + \alpha_2(1, -1) = (x, y) \quad (1) \quad \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = y \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 2 & -1 & y \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2x + y \end{array} \right) R_1 \rightarrow (-)R_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & 2x + y \end{array} \right)$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x + y \\ 0 & 1 & 2x + y \end{array} \right) \rightarrow \alpha_1 = x + y; \alpha_2 = 2x + y \text{ sustituyendo } \alpha_1, \alpha_2 \text{ en (1)}$$

$$(x + y)(-1, 2) + (2x + y)(1, -1) = (x, y) \text{ aplicando la propiedad iii)}$$

$$T(x, y) = (x + y)T(-1, 2) + (2x + y)T(1, -1) \text{ Sustituyendo los transformados de los vectores}$$

$$T(x, y) = (x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (2x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ Aplicando la propiedad distributiva}$$

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \\ -x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x + y \\ 4x + 2y \\ 6x + 3y \end{pmatrix} \rightarrow T(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 2y \\ 5x + 2y \end{pmatrix}$$

Se comprueba verificando para $T(-1, 2)$ y $T(1, -1)$

CASO 2: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $T(1, 0, 0) = (1, 1, 2); T(0, 1, 0) = (-1, 2, 3); T(2, 2, 0) = (0, 1, 3);$

Solución: $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 2, 0)\}$ no es base de \mathbb{R}^3 son LD

$$2(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) = (2, 2, 0) \text{ aplicando la propiedad iii)}$$

$$T(2, 2, 0) = 2T(1, 0, 0) + 2T(0, 1, 0) \text{ sustituyendo los transformados de los vectores}$$

$$(0, 1, 3) = 2(1, 1, 2) + 2(-1, 2, 3) \text{ aplicando la propiedad distributiva}$$

$$(0, 1, 3) \neq (0, 6, 10)$$

No existe TL ya que $T(2, 2, 0) \neq (0, 6, 10)$

CASO 3: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $T(1,0,0) = (1,1,2)$; $T(0,1,0) = (-1,2,3)$; $T(2,2,0) = (0,6,10)$;

Solución: $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (2,2,0)\}$ no es base de \mathbb{R}^3 son LD

$2(1,0,0) + 2(0,1,0) = (2,2,0)$ aplicando la propiedad iii)

$T(2,2,0) = 2T(1,0,0) + 2T(0,1,0)$ sustituyendo los transformados de los vectores

$(0,6,10) = 2(1,1,2) + 2(-1,2,3)$ aplicando la propiedad distributiva

$(0,6,10) = (0,6,10)$

Luego existe una TL pero no es única (se pueden determinar infinitas transformaciones lineales)

Observación: si los vectores de la base son LI la TL es única, si los vectores de la base son LD pueden que TL no exista o que existan infinitas TL

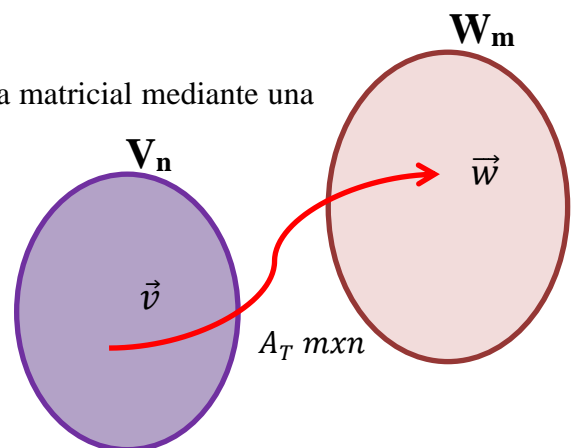
MATRIZ DE TRANSFORMACION

Toda transformación lineal se puede expresar en forma matricial mediante una matriz asociada a esa transformación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Si se cumple que:

$\vec{w} = T(\vec{v})$ y la transformación es lineal entre espacios vectoriales de dimensiones “n” y “m”, entonces existe una matriz de transformación A_T de dimensión “mxn”, tal que

$$T(\vec{v}) = A_T \cdot \vec{v}$$



Las columnas de esta matriz son los vectores transformados de los vectores de la base del espacio vectorial V

Encuentra la matriz de transformación si se sabe que:

$$T(1, 0, 0) = (2, -1, 4)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 5, 2)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$$

Solución: sabiendo que los transformados de los vectores de la base son $T(1, 0, 0) = (2, -1, 4)$; $T(0, 1, 0) = (1, 5, 2)$; $T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$ la matriz de transformación será:

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ las columnas son los vectores transformados de los vectores de la base}$$

Determina A_T , si $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}$ y verifica el $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución: aplicando el transformado a los vectores de la base canónica tendremos

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ las columnas son los vectores transformados de los vectores de la base.}$$

Observa que la manera de verificar es haciendo $A_T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}$

$$\text{Para encontrar el } T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ y \\ 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 \\ 1 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

También se podría encontrar el $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ realizando $\vec{w} = T(\vec{v}) = A_T \vec{v}$ tendremos

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A_T \quad \vec{v} \quad \vec{w}$

Geometría de las transformaciones lineales (ver Grossman)

Expansión o compresión a lo largo del eje x $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$ donde $c > 1$ ó $c < 1$ respectivamente

Expansión o compresión a lo largo del eje y $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cy \end{pmatrix}$ donde $c > 1$ ó $c < 1$ respectivamente

Reflexión respecto al eje x $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

Reflexión respecto al eje y $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

Reflexión respecto a la recta $y = x$ $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Cortes

Corte a lo largo del eje x $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cy \\ y \end{pmatrix}$

Corte a lo largo del eje y $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + cx \end{pmatrix}$

TRABAJO PRACTICO: TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Enuncie las condiciones y determine cuáles de las siguientes aplicaciones son Transformaciones Lineales

- a. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$
- b. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y, 2x+2y, 0)$
- c. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(x, y, z) = (x+y, z, x+1)$
- d. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(x, y, z) = (x^2, ky, z)$
- e. $T: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2 \quad T(ax+b) = bx^2 - ax + (a+b)$
- f. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x+y \\ -y \\ x+z \end{pmatrix}$
- g. $T: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R} \quad T: (M_{2 \times 2}) = \text{Det}(M)$

2. Dada la transformación $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$ Halla los vectores transformados de:

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.1. Representa gráficamente sus vectores y sus transformados.

2.2. Considerando los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $c = 2$ verifica que la transformación es lineal.

2.3. Considerando los mismos vectores y valor de c que el punto anterior, analice la linealidad de las transformaciones

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ y \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$$

3. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por $T(1, 0, 0) = (2, -1, 4)$;

$T(0, 1, 0) = (1, 5, 2)$; $T(0, 0, 1) = (0, 3, 1)$, determina

- a) $T(0, 3, -1)$
- b) $T(2, -4, 1)$
- c) $T(2, -1, 0)$
- d) $T(-2, 4, -1)$

4. Si la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por $T(1, 1, 1) = (2, 0, -1)$;

$T(0, -1, 2) = (-3, 2, -1)$; $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, determina

- a) $T(2, 1, 0)$
- b) $T(2, -1, 1)$
- c) $T(0, 2, -1)$
- d) $T(-2, 1, 0)$

5. Analiza el significado geométrico que tienen las siguientes transformaciones:

$$a) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad c) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad d) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

6. Halla la expresión analítica de las siguientes TL siendo:

$$a) T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b) T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(1, 2, 1) = (1, 1, 1); \quad T(0, 0, 1) = (1, 0, 0); \\ T(1, 0, 1) = (2, 0, 0);$$

7. Para cada una de las transformaciones, determine A_T (si es lineal) y grafica el transformado del cuadrado unitario $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$a) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad b) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix} \quad c) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + 2x \end{pmatrix}$$

8. Se considera que $T(\vec{v})$ es el transformado de la proyección del vector (x, y, z) sobre el plano yz . Grafica y encuentra la expresión de la ley de TL.

9. ¿Cuál es el transformado de los vectores que se encuentran sobre el eje x ? ¿y sobre el eje z ?

10. Determina A_T y en cada caso verifique el $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$a) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad b) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \\ y + z \\ z \end{pmatrix} \quad c) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

11. Dibuja el transformado del cubo unitario para las transformaciones

$$a) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix} \quad b) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$$

12. Aplica la transformación $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ a las rectas definidas paramétricamente y grafique ambas (la recta y su transformada)

$$a) \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} t + 2 \\ t \end{pmatrix}$$

13. Escribe la representación matricial (matriz de Transformación T) de las siguientes TL y dibuja la región que se obtiene cuando se aplica la transformación a un cuadrado unitario ubicado en el primer cuadrante con un vértice en el origen

- Expansión a lo largo del eje y con $c = 3$
- Compresión a lo largo del eje x con $c = \frac{1}{2}$
- Corte a lo largo del eje x con $c = -2$

ISOMETRIAS

Se entiende por transformación isométrica a aquella transformación que no altera ni la forma ni el tamaño del ente matemático en cuestión y que sólo involucra un cambio de posición del mismo, resultando que la figura inicial y final son semejantes y geoméricamente congruentes.

DEFINICIÓN una transformación lineal recibe el nombre de isometría, o congruente rígida, si se cumple

$$|T(\vec{u})| = |\vec{u}|$$

PROPIEDADES

La matriz de transformación A_T de una isometría de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es ortogonal.

Observación: Recordemos que una matriz es ortogonal cuando el producto escalar de dos columnas distintas es igual a cero y de una columna por sí misma es igual a uno

Las únicas transformaciones isométricas son:

- ✓ Una transformación de rotación
- ✓ Una reflexión con respecto al eje “x” o “y” seguida o no por una rotación.

Verifica que para la transformación $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, se cumple que:

- a) A_T es ortogonal
- b) La condición que $|T\vec{u}| = |\vec{u}|$ para el vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y también para $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- c) $|T(\vec{u}) - T(\vec{v})| = |\vec{u} - \vec{v}|$ siendo $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

- a) La matriz de transformación A_T está formada por los transformados de la base canónica

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

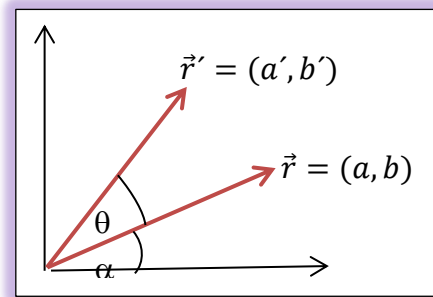
- ✓ el producto entre las columnas será $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
- ✓ el producto de una columna por sí misma será: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$$b) \quad T \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left| T \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25}; \quad |\vec{u}| = 5$$

$$c) \quad \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

ROTACIÓN

En \mathbb{R}^2 una rotación con centro en el origen de coordenadas es una transformación isométrica. Analizaremos esta transformación deduciendo la matriz de rotación, para un vector de módulo $|\vec{r}|$ que gira un ángulo θ .



$$\begin{cases} a = r \cos \alpha \\ b = r \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} a' = r \cos (\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ b' = r \sin (\alpha + \theta) = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = a \cos \theta - b \sin \theta \\ b' = a \sin \theta + b \cos \theta \end{cases} \quad \text{Es decir } \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ siendo por lo tanto}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ matriz de transformación de una rotación } \theta$$

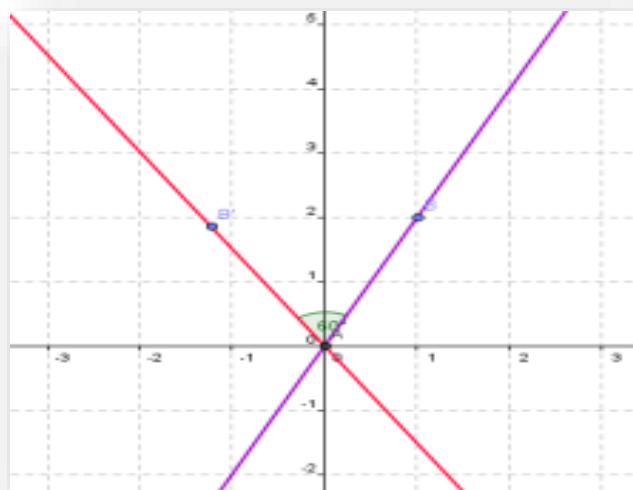
Rota la recta $y = 2x$ un ángulo de 60° . Verificarlo gráficamente.

Solución:

$\vec{r} = (t, 2t)$; $\vec{r}' = (a', b')$ recta rotada

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t - \sqrt{3}t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t + t \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}' = ((\frac{1}{2} - \sqrt{3})t, (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)t)$$



Rotar la recta $y = \frac{1}{2}x$ tal que resulte perpendicular a la recta $y = x$.

Solución

$$y = \frac{1}{2}x \rightarrow \vec{v}_d = (2, 1)$$

$$y = x \rightarrow \vec{v}_n = (1, -1)$$

$$\cos \theta = \frac{(2, 1) \cdot (1, -1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

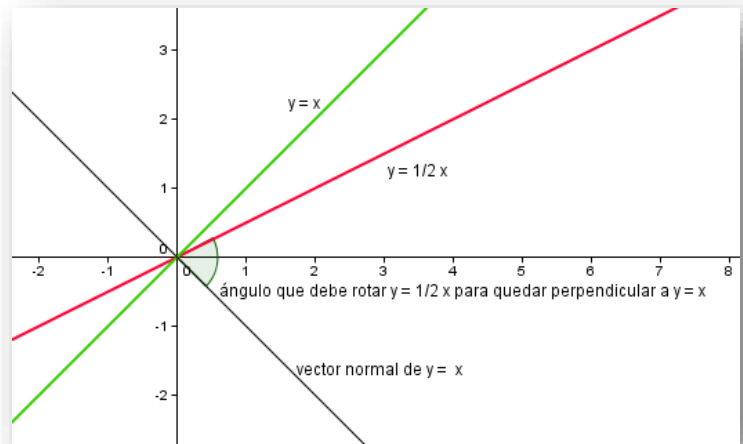
Para encontrar el $\sin \theta$ se ocupa la relación fundamental trigonométrica

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}x \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x \\ -\frac{5}{2}x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10}x \\ -\frac{\sqrt{10}}{10}x \end{bmatrix} \rightarrow \text{las ecuaciones paramétricas serán: } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{10}}{10}t \\ y' = -\frac{\sqrt{10}}{10}t \end{cases}$$

Las ecuaciones simétricas $t = \frac{x'}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = \frac{y'}{-\frac{\sqrt{10}}{10}}$ La ecuación explícita $y' = -x'$



En \mathbb{R}^3 se resuelve el problema mediante rotaciones alrededor de los ejes cartesianos, es decir, rotación alrededor del eje X, o del eje Y, o del eje Z.

Considerando un vector vector en \mathbb{R}^3 de componentes (a b, c) es decir:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r' = T(r) \Rightarrow \begin{bmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{bmatrix} = aT \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + bT \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + cT \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ transformación lineal}$$

Por lo tanto, al analizar las rotaciones alrededor de cada uno de los ejes coordenados, no referiremos a la rotación de los vectores base, que son los versores $\check{i}, \check{j}, \check{k}$

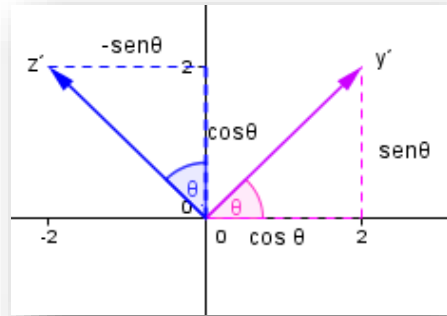
1er. Caso alrededor del eje “x” (en el plano YZ)

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto } A_{\theta}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

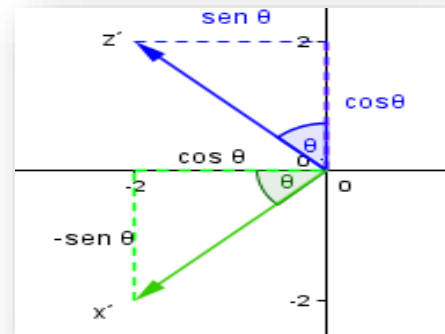
**2do. Caso** alrededor del eje “y” (en el plano XZ)

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

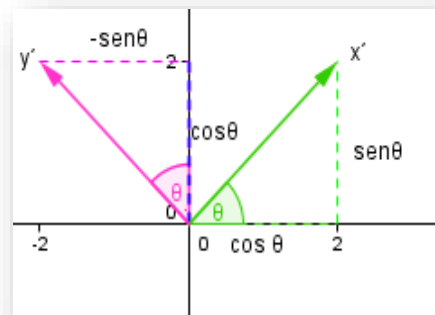
$$\text{Por lo tanto } A_{\theta}^y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

**3er. Caso** alrededor del eje “z” (en el plano XY)

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

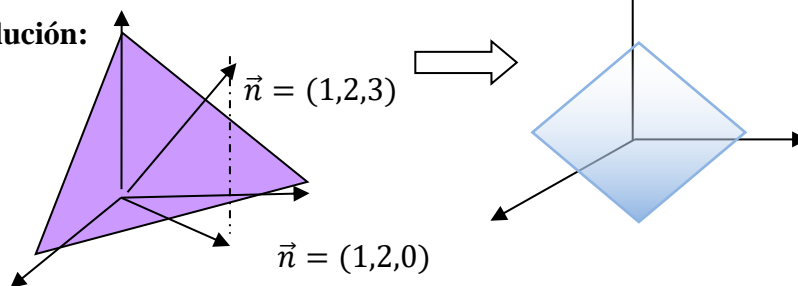


$$\text{Por lo tanto } A_{\theta}^z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una rotación en general tendrá las tres componentes de rotación $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ y por lo tanto será el producto de las tres matrices.

Rotar el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$ para que quede paralelo al eje X

Solución:



Posición inicial

Posición final

Para que el plano quede paralelo al eje X, una posibilidad es proyectar el vector normal sobre el plano xy y luego rotar alrededor del eje Z. El ángulo de rotación será el ángulo comprendido entre el vector normal proyectado en el plano XY y el eje Y

$$\cos \varnothing = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \sin^2 \varnothing + \cos^2 \varnothing = 1 \rightarrow \sin^2 \varnothing = \sqrt{1 - \cos^2 \varnothing} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Rotando el vector normal $\vec{n} = (1, 2, 3)$ alrededor del eje z $\vec{n}' = T(\vec{n}) = A_{\varnothing}^z \cdot \vec{n}$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Con un punto (que se puede tomar el del eje z, ya que no variará) y el vector rotado se arma la nueva ecuación del plano $\pi' : \frac{5}{\sqrt{5}}y + 3z = 6$

Observación la distancia del plano al origen debe permanecer igual, comprueba siempre si esto sucede.

$$\text{dist}(\pi, O) = \frac{6}{\sqrt{1+2^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \quad \text{dist}(\pi', O) = \frac{6}{\sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Rotar la recta $r: x = 2t + 1, y = -t, z = t - 1$ tal que resulte paralela al plano “xz”

Solución: para que la recta quede paralela al plano “xz”, una posibilidad es proyectar el vector director sobre el plano xy y luego rotar alrededor del eje Z. El ángulo de rotación será el ángulo comprendido entre el vector director proyectado en el plano XY y el eje x

$$\cos \varnothing = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{sen}^2 \varnothing + \cos^2 \varnothing = 1 \rightarrow \text{sen}^2 \varnothing = \sqrt{1 - \cos^2 \varnothing} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

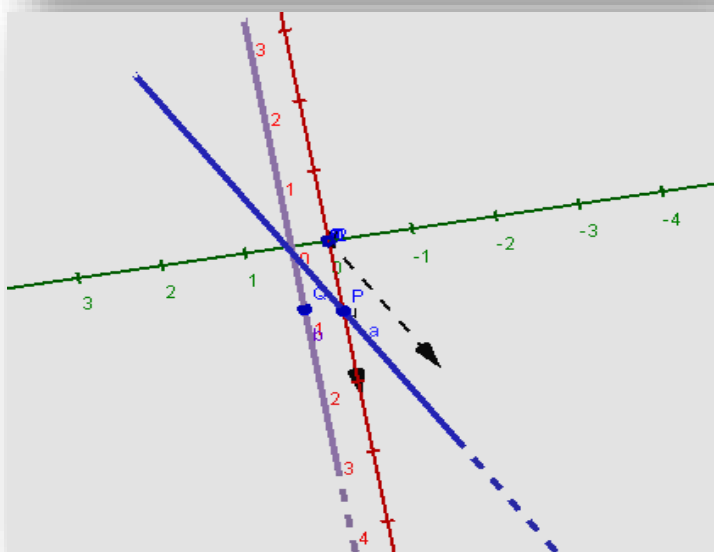
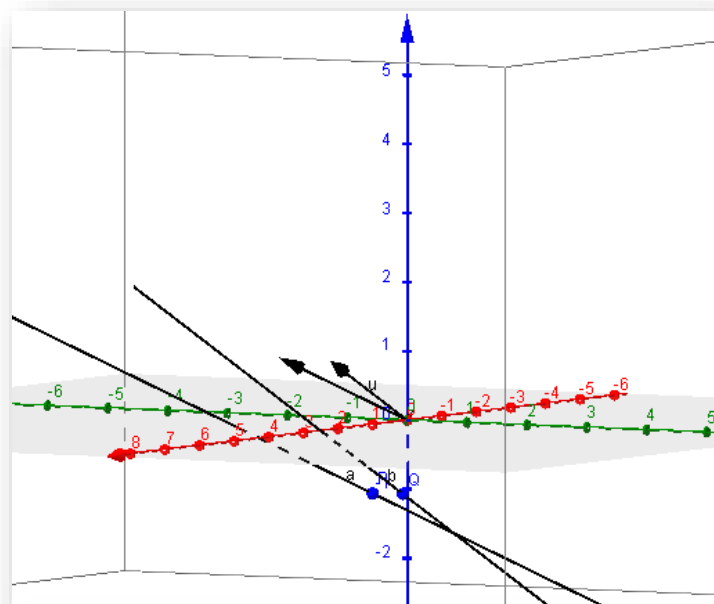
Rotando la recta alrededor del eje z $\vec{n}' = T(\vec{n}) = A_{\varnothing}^z \cdot \vec{n}$ obtendremos la recta rotada

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t + 1 \\ -t \\ t - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}}t \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ t - 1 \end{bmatrix}$$

Otra posibilidad es rotar el vector director de la recta \vec{v} y $P(1,0,-1)$

En la gráfica se aprecian las dos rectas, la recta sin rotar pasa por el punto P con la dirección del vector \vec{v} y la recta rotada pasa por el punto Q y con vector director \vec{u}

Vista gráfica desde arriba, donde se puede apreciar la que la recta rotada (lila) queda paralela al eje x (línea roja)



Recta rotada

TRABAJO PRÁCTICO - ISOMETRIA

1. Define que es una transformación isométrica. ¿Es siempre posible encontrar transformaciones isométricas? ¿Qué condición debe cumplir la matriz de transformación?
2. Obtén la reflexión del vector $\vec{v} = (-2, 5)$ con respecto al eje “y” y muestra además, que es posible obtenerla utilizando una matriz de rotación. Verifica las condiciones para que la transformación resulte isométrica
3. Obtén la expresión analítica y matricial de la transformación lineal que representa una reflexión sobre la recta $y = -x$. Grafica $(2,1)$ y $T(2,1)$
4. Rota el vector $\vec{v} = (3, -1/3)$ de modo tal que la proyección sobre el eje “x” resulte nula. Verifica las condiciones para que la transformación resulte isométrica.
5. Rota la recta $y = -3x + 3$ un ángulo de -30° . Verifica gráficamente.
6. Rota la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ un ángulo tal que quede paralela al eje de las abscisas.
7. Rota el punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ un ángulo de 45° . Verifica gráficamente.
8. Determina la matriz de rotación que lleve el punto $(5,8)$ hasta su simétrico respecto a la recta $y = x$. Verificarlo gráficamente.
9. Rota el cuadrilátero cuyos puntos son $(6,5)$; $(10,5)$; $(7,12)$ y $(4,8)$ un ángulo de 60° .
10. Rota la recta $y = -3x + 2$ de manera tal que resulte perpendicular a $y = 2x + 5$
11. Rota el plano $y = 2x - 2$ alrededor del eje “z” un ángulo de 90°
12. Rota el plano: $x + y - z = 10$ alrededor del eje “x” un ángulo de 30°
13. Rota el plano $\pi_1: x = \lambda; y = \mu; z = \lambda + \mu - 10$ alrededor del eje “z” un ángulo de 60°
14. Rotar el plano $3x - 2y = 6$ de manera tal que resulte perpendicular al eje “y”
15. Rota la recta $r: x = 2t + 1, y = -t, z = t - 1$ tal que resulte paralela al plano “xz”
16. Rota el plano $\pi_3: x + 5z - 10 = 0$ de manera tal que resulte paralelo al plano “xy”
17. Rota el plano $x + y + z = 1$, un ángulo de 30° alrededor del eje “x” y luego 60° alrededor del eje “z”. Grafica este último plano.
18. Rota la recta $y = -3x + 2$ de manera tal que resulte perpendicular a $y = 2x + 5$
19. Encuentra la imagen del triángulo determinado por la intersección de las rectas $y = 2x$;

$$y = \frac{1}{2}x; y = -x + 1 \text{ mediante la transformación lineal } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- a) Grafica el triángulo y su transformado
- b) ¿Es una transformación isométrica?
- c) Aplica al triángulo una rotación en sentido antihorario de 120° .

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

El nombre original de los autovalores fue el de **eigenvalores**, donde **eigen** en alemán significa **propio**. Recién en 1840, después de más de un siglo de uso, el matemático francés Agustín-Louis (1789-1857), barón de Cauchy utiliza por primera vez el nombre de **valores propios** quedando con el tiempo simplemente **Autovalores**.

Los autovalores se emplean en diversas áreas de la matemática, en la resolución de problemas hidrodinámicos, mecánicos, físicos de ingeniería eléctrica y nuclear, etc.

DEFINICIÓN: Dado un espacio vectorial $(V; +; R; \cdot)$ y sea $T: V \rightarrow W$, en algunas ocasiones interesa encontrar un vector no nulo \vec{v} tal que $T(\vec{v})$ y \vec{v} mantengan la misma dirección, por lo tanto debe existir un escalar λ tal que

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

$\lambda \in R$ es un valor propio o autovalor de T ,

\vec{v} es un autovector o vector propio $\vec{v} \neq 0$

Geométricamente significa que el vector transformado es paralelo al vector sin transformar.

Sea una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (2x, x + 3y)$

$T(1, -1) = (2, -2) = 2(1, -1) \rightarrow (1, -1)$ es el vector propio correspondiente al valor propio 2

$T(3, -3) = (6, -6) = 2(3, -3) \rightarrow (3, -3)$ es el vector propio correspondiente al valor propio 2

En general $E_2 = \{(x, -x) \in R^2 / (x, -x) \neq (0, 0)\}$

$T(0, 1) = (0, 3) = 3(0, 1) \rightarrow (0, 1)$ es el vector propio correspondiente al valor propio 3

$T(0, 5) = (0, 15) = 3(0, 5) \rightarrow (0, 5)$ es el vector propio correspondiente al valor propio 3

En general $E_3 = \{(0, y) \in R^2 / (0, y) \neq (0, 0)\}$

Los vectores propios que \in a E_1 y a E_2 mantienen la misma dirección, ya que su transformado es un múltiplo escalar de él mismo

¶ Sea una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2 / T(x, y) = (2x, x + 3y)$

Halla todos los valores y vectores propios de la transformación lineal

AUTOVALOR ASOCIADO A UNA MATRIZ

Casi todos los vectores cuando son multiplicados por una matriz A cambian de dirección, excepto en ciertos casos donde el vector \vec{v} está en la misma dirección que $A \vec{v}$ a estos vectores se los denomina eigenvectores o vectores propios de A correspondientes al valor λ

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (1)$$

Esto quiere decir que si λ es un autovalor de la matriz A y \vec{v} es un autovector de A correspondientes a ese valor de λ , entonces la multiplicación de \vec{v} por la matriz A produce un vector $\lambda \vec{v}$ paralelo a \vec{v}

Sea $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ Demuestra que $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ son autovectores de A . ¿cuáles son los autovalores correspondientes?

Solución: según la ecuación (1) y realizando el producto entre la matriz y los correspondientes

$$\text{vectores } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2,1) es un autovector cuyo autovalor correspondiente es $\lambda = 3$.

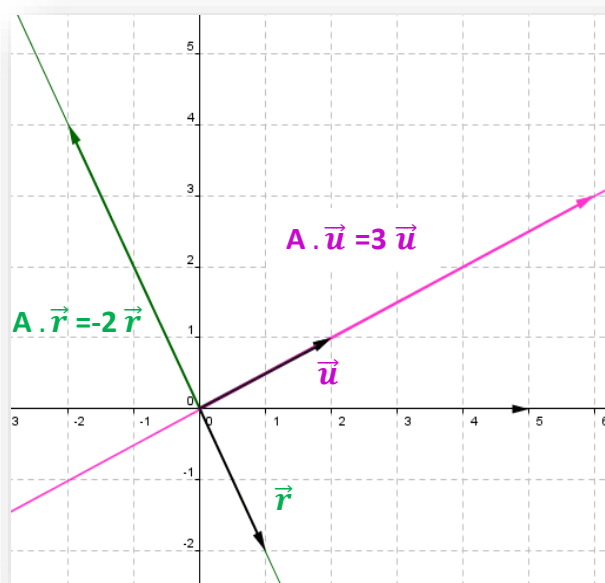
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(1,-2) es un autovector cuyo autovalor correspondiente, es $\lambda = -2$

Los vectores \vec{u} y \vec{r} determinan la dirección de las rectas L_1 y L_2 , respectivamente que pasan por el origen.

Geométricamente, $A \cdot \vec{v}$ es la TL que dilata a cualquier vector \vec{u} de L_1 en un factor $\lambda = 3$,

en tanto que los vectores \vec{r} a los largo de L_2 se reflejan respecto del origen de coordenadas y luego sufren un dilatación en un factor $\lambda = 2$



El concepto de autovalor y autovector es en realidad propio de una matriz cuadrada que en caso de ser una matriz de transformación, se extiende su aplicación a las transformaciones. El teorema que sigue considera una matriz A $n \times n$, (demostrado en el Grossman).

Definición:

$$\text{Sea } A[\vec{v}] = \lambda [\vec{v}] \rightarrow A[\vec{v}] = \lambda [I][\vec{v}] \rightarrow A[\vec{v}] - \lambda [I][\vec{v}] = [0] \rightarrow [A - \lambda I][\vec{v}] = [0] \quad (1)$$

Esta última expresión implica un sistema de ecuaciones homogéneo, de infinitas soluciones, ya que \vec{v} debe ser $\neq 0$, por lo tanto $\det|A - \lambda I| = 0$. O sea si el $\det|A - \lambda I| = 0$, entonces la ecuación (1) tiene soluciones no triviales y λ es el valor característico de A . Por otro lado si $\det|A - \lambda I| \neq 0$ la única solución sería la trivial entonces $\vec{v} = 0$ de manera que λ no sería un valor característico de A .

Teorema: Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces λ es un valor característico de A sí y sólo sí

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

(2)

La ec. (2) se denomina **ecuación característica** de A; p_λ **polinomio característico** de grado n.

Cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales tiene exactamente n raíces. O sea que si tenemos $(\lambda - 2)^4$ tiene 4 raíces, todas iguales a 2. .

Como cualquier valor característico de A, es una raíz de la ecuación característica de A, se concluye que:

**Contando multiplicidades, toda matriz de n x n
tiene exactamente n valores característicos**

ESPACIO CARACTERÍSTICO: Sea λ un valor característico de A. El subespacio E_λ se denomina *espacio característico o propio de A* correspondiente al valor λ .

Ahora se probará otro resultado útil:

Teorema: Sea A una matriz de n x n y sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valores característicos distintos de A con autovectores característicos correspondientes $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$. Entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ serán linealmente independientes. O sea, *cuando los valores característicos son distintos los autovectores son linealmente independientes.*

Demostración se realiza por inducción matemática comenzando por $m = 2$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

Multiplicando a ambos lados por A se tiene

$$A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2) = A\alpha_1 \vec{v}_1 + A\alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Como $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ para $i = 1, 2$

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

Se multiplica (1) por λ_1 y se le resta (2) para obtener

$$(\alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_1 \vec{v}_2) - (\alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2) = \vec{0}$$

O sea

$$\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Como $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ por definición de vector característico y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que $\alpha_2 = 0$. Entonces, sustituyendo $\alpha_2 = 0$ en (1) se ve que $\alpha_1 = 0$ lo que prueba el teorema. Y esto también se cumple para $m = k$ y para $m = k + 1$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k + \alpha_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \quad (3)$$

Multiplicando ambos lados de (3) por A

$$\alpha_1 A\vec{v}_1 + \alpha_2 A\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k A\vec{v}_k + \alpha_{k+1} A\vec{v}_{k+1} = \vec{0}$$

y usando $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ se tiene

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k \vec{v}_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} = \vec{0} \quad (4)$$

Se multiplica ambos lados de (3) por λ_{k+1} y se resta de (4)

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \vec{v}_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \vec{v}_k = \vec{0} \quad (5)$$

Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ son linealmente independientes y como $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$, se concluye que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, pero de (5) se concluye que $\alpha_{k+1} = 0$. Por lo tanto, el teorema se cumple para $m = k$ y para $m = k + 1$

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA Se llama multiplicidad algebraica de un valor propio, a su multiplicidad como raíz del polinomio característico, es decir, al número de veces que aparece como raíz de dicho polinomio.

MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA Es la dimensión del espacio característico

$\dim E_\lambda = (A - \lambda I) \vec{v}$, es decir el conjunto de vectores asociados a un valor propio λ , La multiplicidad geométrica de un valor característico NUNCA es cero, si λ es un valor característico, entonces existe un vector característico DIFERENTE DE CERO que corresponde a λ

PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR VALORES CARACTERÍSTICOS Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

1er. Paso: Se encuentra $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

2do. Paso: Se encuentran las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. los autovalores no tienen por qué ser distintos.

3er. Paso: Se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$, correspondiente a cada valor característico λ_i . Para llevar a cabo lo anterior se requiere reducir por renglones una matriz de $n \times n$. La forma resultante escalonada reducida por renglones debe contener por lo menos un renglón de ceros.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ halla el polinomio característico, los autovalores, autovectores y el espacio característico correspondientes

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \rightarrow P(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 12 = (\lambda - 4)(\lambda + 3)$$

Las raíces de esta ecuación son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -3$, que representan los autovalores de A. Para hallar los autovectores, se plantea $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para cada uno de los autovalores hallados.

$$\text{Para } \lambda_1 = 4 \quad \begin{pmatrix} 2-4 & -5 \\ -2 & -1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x - 5y = 0 \\ -2x - 5y = 0 \end{cases} \rightarrow y = -\frac{2}{5}x$$

El espacio solución será $E_{\lambda_1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\frac{2}{5}x \end{pmatrix} \right\}$, luego un autovector para $\vec{v}_1 = (5, -2)$

$$\text{Para } \lambda_2 = -3 \quad \begin{pmatrix} 2+3 & -5 \\ -2 & -1+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow y = x$$

El espacio solución será $E_{\lambda_2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \right\}$, luego un autovector para $\vec{v}_2 = (1, 1)$

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ halla el polinomio característico, los autovalores,

autovectores y el espacio característico correspondiente. Indica la multiplicidad algebraica y la geométrica

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$P(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -4 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Los autovalores serán $\lambda_1 =$

1 que es un valor característico de multiplicidad algebraica 2

$\lambda_2 = -1$, de multiplicidad algebraica 1.

Para $\lambda_1 = 1$ se resuelve la ecuación característica $(A - 1I)\vec{v} = \vec{0}$, que nos permitirá hallar los autovectores

$$\begin{pmatrix} -3-1 & 0 & -4 \\ 4 & 1-1 & 4 \\ 2 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1, R_3 \rightarrow 2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \{-4x - 4z = 0 \rightarrow z = -x$$

El espacio solución será $E_{\lambda_1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, luego tendremos dos

autovectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *la multiplicidad geométrica es 2.*

$$\text{Para } \lambda_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} -3+1 & 0 & -4 \\ 4 & 1+1 & 4 \\ 2 & 0 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3+1 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = -2z \\ y = 2z \end{matrix}$$

El espacio solución será $E_{\lambda_2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \right\}$, luego un autovector para $\vec{v}_3 = (-2, 2, 1)$ la

multiplicidad geométrica es 1.

PROPIEDADES:

- ✓ A cada autovalor le corresponden infinitos autovectores
- ✓ Cada autovector está asociado a un único autovalor

IMPORTANTE

Los autovalores de una matriz:

- ❖ Pueden ser valores reales o complejos, (trabajaremos únicamente con reales)
- ❖ Pueden haber dos o más con el mismo valor (multiplicidad algebraica)
- ❖ Pueden ser cero.

Los autovectores de una matriz:

- ❖ Nunca puede ser el vector nulo
- ❖ Si los autovalores son diferentes, los autovectores son linealmente independientes
- ❖ Si los autovalores son iguales (**multiplicidad algebraica**), puede haber tantos autovectores linealmente independientes como el orden de la multiplicidad o menor.

Se recomienda analizar los ejemplos del Grossman Cap 6 Autovalores y Autovectores

¶ Para las siguientes matrices calcula autovalores, autovectores, espacio generado, y analiza las multiplicidades algebraicas y geométricas (desarrollados en clase)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

TRABAJO PRACTICO AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1. En los siguientes ejercicios comprueba que λ_i es un autovalor de A y que \vec{v}_i es un autovector correspondiente.

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \vec{v}_1 = (1,0) \quad / \quad \lambda_2 = -1 \quad \vec{v}_2 = (0,1)$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -1 \quad \vec{v}_1 = (1,1) \quad / \quad \lambda_2 = 2 \quad \vec{v}_2 = (5,2)$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0 \quad \vec{v}_1 = (1,-1) \quad / \quad \lambda_2 = 2 \quad \vec{v}_2 = (1,1)$$

$$d) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2 \quad \vec{v}_1 = (1,0,0) \quad / \quad \lambda_2 = -1 \quad \vec{v}_2 = (1,-1,0) \quad / \quad \lambda_3 = 3 \quad \vec{v}_3 = (5,1,2)$$

2. Determina si \vec{v}_i es un autovector

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = (1,2), \vec{v} = (2,1), \vec{v} = (1,-2), \vec{v} = (-1,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = (2,3,-1), \vec{v} = (9,0,-6), \vec{v} = (1,-6,4)$$

3. Encuentra geoméricamente los autovalores y los autovectores de A

$$a) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad c) C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad d) D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Determina cuáles de los escalares dados son valores propios para la matriz A dada.

$$a) A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9, \lambda_4 = -6$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 2$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1/2, \lambda_4 = 2/5$$

5. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (x; 3x + 2y; 5x - 7y + 3z)$. Determina cuáles de los siguientes vectores de \mathbb{R}^3 son vectores propios de T. En tal caso, determinar el autovalor

- | | | |
|------------|---------------|--------------|
| a) (3,2,0) | d) (0,-2,-14) | g) (0,0,7) |
| b) (0,1,7) | e) (4,1,3) | h) (-2,6,26) |
| c) (0,0,1) | f) (-1,3,13) | |

6. Plantea la ecuación característica para cada matriz y calcula los autovalores y los espacios característicos de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica es mayor que 1, calcula la multiplicidad geométrica

$$a) A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d) A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Demuestra que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ no tiene autovalores reales

6. Si los autovalores de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ ¿Cuáles son los posibles valores de a y d?

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$ calcula los valores de los parámetros a y b para que el vector $(-1, 1)$ sea un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ en la matriz a. ¿Cuál es el otro autovalor?

8. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- Calcula los autovalores y los respectivos autovectores.
- Determina el valor de a

10. Analiza la relación entre valores característicos y vectores linealmente independientes para las matrices dadas, en la propuesta 4.

11. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{bmatrix}$

- Calcula A de forma que $(2, 0, -1)$ sea un autovector cuyo autovalor correspondiente es $\lambda = -1$.
- Hallar los demás autovalores y autovectores de A.

12. Determina la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{bmatrix}$ de manera que admita por autovectores a los vectores

$(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.

MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

MATRICES SEMEJANTES

DEFINICIÓN: Se dice que las matrices A y B, ambas $n \times n$, son semejantes, si existe una matriz invertible C, también de $n \times n$ tal que $B = C^{-1} A C$

Suponga que $B = C^{-1} A C$. Entonces al multiplicar por la izquierda por C

$$C B = C C^{-1} A C \quad \text{como } C C^{-1} = I$$

se obtiene

$$C B = A C$$

Definición alternativa de semejanza

A y B son semejantes si y sólo si existe una matriz invertible C tal que

$$C B = A C$$

Si dos matrices A y B son semejantes, entonces tienen la misma ecuación característica y por lo tanto los mismos autovalores.

$A \sim B$ (A es semejante a B) si se cumplen las siguientes propiedades:

- $\det A = \det B$ (se demuestra en clase teórica)
- A y B tienen el mismo polinomio característico (se demuestra en clase teórica)
 $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$; $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$
- A y B tienen los mismos autovalores

Sean $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, determina una matriz B semejante a A tal que

$$B = C^{-1} A C$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\checkmark \quad |A| = |B|$$

$$|A| = -2 \quad ; \quad |B| = -2$$

$$\checkmark \quad \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$$

$$\begin{bmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 - \lambda & -8 \\ 11 & 9 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(-2 - \lambda)(1 - \lambda) = (-10 - \lambda)(9 - \lambda) + 88$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$(\lambda + 2)(1 - \lambda)$$

$$\checkmark \quad \text{Los autovalores de A y B son iguales } \lambda = -2 \quad ; \quad \lambda = 1$$

PROPUESTOS 1 determina si A y B son semejantes mediante las propiedades

$$1) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPUESTOS 2 determina el valor de la matriz C, para que A y B sean semejantes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN

Una matriz A $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D. Si D es una matriz diagonal, entonces sus autovalores son sus componentes en la diagonal principal, entonces si A es semejante a D, A y D tienen los mismos autovalores.

Diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución: por ser una matriz triangular superior los autovalores serán las componentes de la diagonal principal: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$, por lo tanto $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ o también $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

MATRIZ DIAGONALIZANTE O DE PASO “C”

A de tamaño $n \times n$ es diagonalizable sí y sólo sí a tiene n autovectores linealmente independientes. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ autovectores LI de la matriz A $n \times n$. Se puede construir una matriz C cuyas columnas serán dichos autovectores:

$$C = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$$

La matriz C $n \times n$ se denomina matriz diagonalizante o matriz de Paso. Como los autovectores son LI, C tendrá inversa, se puede entonces demostrar que

$$D = C^{-1} A C$$

donde D es una matriz diagonal cuyos elementos son los respectivos autovalores

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

En el Ejemplo 1 hemos determinado la matriz diagonal sin necesidad de determinar la matriz C que diagonaliza A mediante $D = C^{-1} A C$. Pero esta matriz C es posible determinarla y es la matriz cuyas columnas son los autovectores de A linealmente independientes.

La inversa de C se obtiene haciendo:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \text{adj } C \quad \text{siendo la } \text{adj } C \text{ la transpuesta de la matriz de los cofactores } C$$

Diagonaliza la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, mediante la determinación de la matriz C y posterior cálculo $C^{-1} A C$

Solución: al ser una matriz triangular superior los autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ (entradas en la diagonal principal), los autovectores son $\vec{v}_1 = (1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (4, 1)$.

La matriz diagonalizante estará formada por los autovectores de $A \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_D = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C$$

PROPIEDADES

- Dada una matriz diagonalizable, existen infinitas matrices semejantes (similares) a ella. Pero la matriz similar diagonal, es aquella cuya diagonal principal son los autovalores.
- Para que una matriz de $n \times n$ sea diagonalizable, debe tener “ n ” autovectores linealmente independientes.
- Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores característicos diferentes entonces A es diagonalizable

Diagonaliza determinando sus autovalores y verifica la diagonalización mediante la determinación de la matriz C y posterior cálculo de $C^{-1} A C$

$$\bullet \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & -3 \\ 3 & 2 - \lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 4) = 0$$

Autovalores $\lambda = 2$ (multiplicidad algebraica doble) y $\lambda = -4$ multiplicidad algebraica simple.

Cálculo de autovectores

- si $\lambda = 2$
$$\begin{pmatrix} -1-2 & 0 & -3 \\ 3 & 2-2 & 3 \\ -3 & 0 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -3x - 3z = 0 \\ ec. de un plano \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

El espacio solución será $E_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$, como tenemos dos variables libres, tendremos dos

autovectores para $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$ $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$ la multiplicidad geométrica es 2

- si $\lambda = -4$
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 6y + 6z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

El espacio solución será $E_{\lambda=-4} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \right\}$, como tenemos una variable libre, tendremos un solo

autovector para $\vec{v}_3 = (1, -1, 1)$

La matriz C estará formada por los autovectores hallados.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_D = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C$$

- $$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: $|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$

Autovalores $\lambda = 2$, doble $\lambda = 3$ simple

La matriz B será diagonalizable si la multiplicidad geométrica del sistema es 3

Para $\lambda = 2$ tendremos $(B - 2I) \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = x \end{cases}$$

El espacio solución será $E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, como tenemos una variable libre, tendremos un solo autovector, como **NO** coincide la multiplicidad algebraica con la geométrica, la matriz no es diagonalizable.

$$\bullet \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: esta matriz es triangular inferior, luego los autovalores son los elementos de la diagonal principal

$$|E - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(3 - \lambda)^2 = 0$$

Autovalores $\lambda = 3$, multiplicidad algebraica doble, $\lambda = 0$ simple

La matriz D será diagonalizable si la multiplicidad geométrica del sistema es 3

Si $\lambda = 3$ entonces tendremos $(E - 3I) \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$$

El espacio solución será $E_{\lambda=3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\}$, como tenemos dos variable libres, tendremos dos autovectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$ haciendo $(E - 0I) \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -\frac{2}{3}y \end{cases}$$

El espacio solución será $E_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix} \right\}$, como tenemos una variable libre, tendremos un autovector

$$\vec{v}_3 = (0, 3, -2)$$

La matriz C estará formada por los autovectores hallados $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$ que existe C^{-1} el

procedimiento es similar al ejemplo para la matriz A

Observaciones:

- a) En el ejemplo 4 la matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tiene un autovalor de multiplicidad doble, y un autovalor de multiplicidad 1, y tres autovectores LI, constituyen una base de \mathbb{R}^3 , por lo tanto es diagonalizable
- b) En el ejemplo 4 la matriz $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tiene un autovalor de multiplicidad doble, y un autovalor de multiplicidad 1, y sólo 2 autovectores LI por lo tanto NO es diagonalizable, ya que no constituyen una base de \mathbb{R}^3
- c) En el ejemplo 4 la matriz $E \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es triangular inferior los autovalores están en la diagonal, tiene un autovalor de multiplicidad doble y un autovalor de multiplicidad 1, y tres autovectores LI por lo tanto es diagonalizable

OBSERVACIÓN: que la matriz E tenga determinante cero, NO SIGNIFICA QUE NO SE PUEDA DIAGONALIZAR

MATRICES SIMÉTRICAS Y DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

MATRICES SIMÉTRICAS

Definición: La matriz A de nxn se denomina simétrica si $A = A^t$. Es decir las columnas de A son también los renglones de A.

$$\bullet \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Una matriz simétrica tiene la propiedad de que es su propia “imagen especular” (imagen de un espejo) con respecto a su diagonal principal. Las figuras correspondientes representan entradas iguales, las entradas sobre la diagonal (cuadrados punteados) son arbitrarias.

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & & * \\ \blacksquare & \triangle & \\ * & \triangle & \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada es simétrica sí y sólo sí $a_{ij} = a_{ji}$

PROPIEDADES

Las matrices simétricas A nxn tienen varias propiedades importantes:

- a) Sus n autovalores son números reales
- b) Tiene n autovectores reales linealmente independientes
- c) Como consecuencia de la propiedad b) A es diagonalizable
- d) Los autovectores correspondientes a autovalores característicos diferentes, son ortogonales

Únicamente en ese caso existe una matriz diagonalizante que es ortogonal Q
Se dice que una matriz A nxn es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal Q tal que

$$D = Q^t A Q$$

Observación Q es ortogonal si $Q^t = Q^{-1}$

Sea A una matriz real de nxn. Entonces A es **diagonalizable ortogonalmente** sí y sólo sí **A es simétrica**

Pasos a seguir:

- a) Plantear la ecuación característica y determinar los autovalores (observar la multiplicidad algebraica si hubiera)
- b) Determinar los autovectores y una base para cada subespacio propio de A
- c) Si hay autovalores distintos, los autovectores son ortogonales, linealmente independientes y sólo deben normalizarse. Si hay multiplicidad algebraica, hay que ortonormalizarlos, según el Proceso de Gram Schmidt, para obtener las bases de cada subespacio propio de A (o sea la matriz Q)
- d) Ubicar en una sola matriz estas bases normalizadas obteniendo así una base ortonormal Q formada por los autovectores de A.

Diagonaliza la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$, mediante la determinación de la matriz Q y posterior cálculo

$$Q^t A Q = D$$

Solución: puesto que $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 11$
 $= (\lambda - 1)(\lambda - 11)$

Cálculo de autovectores

- si $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 3 & 10-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x + 3y = 0$

El espacio solución será $E_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} \right\}$, como tenemos una variable libre, tendremos un solo autovector para $\vec{v}_1 = (3, -1)$

- si $\lambda = 11$ $\begin{pmatrix} 2-11 & 3 \\ 3 & 10-11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -9x + 3y = 0$

El espacio solución será $E_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \right\}$, como tenemos una variable libre, tendremos un solo autovector para $\vec{v}_2 = (1, 3)$

La matriz Q estará formada por los autovectores hallados.

$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$ Claramente se ve que los autovectores son ortogonales

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3, -1) \cdot (1, 3) = 0$$

Para que sea ortonormal, normalizamos los autovectores $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \rightarrow Q^{-1} = Q^t \quad Q^t = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}}_D = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}}_{Q^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}}_Q$$

TRABAJO PRACTICO MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACION

1. Define matrices semejantes y sus propiedades.
2. Determina las matrices semejantes y valida con las propiedades

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

3. Sean las matrices $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
 - a) Indica de las matrices dadas, cuál de ellas es la matriz C (siguiendo la nomenclatura)
 - b) utilizando las matrices dadas, encontrar una matriz semejante a una de ellas (B)
 - c) ¿puede obtenerse otra matriz B* semejante a alguna de las matrices dadas, planteando una matriz C distinta?
 - d) encuentra los autovalores de A, B y B*
 - e) encuentra los autovectores de A, B y B*
4. Define diagonalización de matrices. ¿Todas las matrices se pueden diagonalizar? ¿Qué relación debe existir entre multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica? ¿la matriz diagonalizante y la matriz diagonal son únicas?

5. ¿Cuáles matrices por simple observación podrías decir que son diagonalizables y por qué?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad b) P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad c) R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad d) S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. De las matrices dadas en el punto 5, explica el proceso de diagonalización de cada una de ellas.

7. Sea $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ obtén todos los valores de a para que

- i) sus autovalores sean distintos. ¿A es diagonalizable para estos valores de a?
- ii) para $a = 1$ ó $a = 2$ verifique si es diagonalizable.

8. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ encuentra los autovalores de la matriz A y determina que

autovectores permanecen sin cambio luego de la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(\vec{v}) = A\vec{v}$

9. Encuentra “a” tal que $\lambda = 3$ sea un autovalor de multiplicidad 2. ¿Es diagonalizable la matriz?

justifica tu respuesta. $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

10. Encuentra a, b, c, d, e, f tal que los vectores (1,1,1); (1,0,-1); (1,-1,0) sean autovectores de

la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

11. ¿Para qué valores de a, b y c resulta $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonalizable?

12. a) Halla el polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$

b) Halla de A las incógnitas a,b,c siendo sus autovalores las raíces de $t^3 - 3t^2 + 2t$

13. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Determinar los valores de a y b de modo que $\lambda = 3$ sea un autovalor doble, y A sea diagonalizable

Ejercicios surtidos !!!!

14. Dados los siguientes vectores y valores propios, hallar la matriz A

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=4$

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-2$

15. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (x + 4y, x + y)$ y $B = \{(1,0), (0,1)\}$, halla:

- la matriz asociada a la transformación
- la ecuación característica y los valores propios
- la matriz de Paso o diagonalizante C
- la matriz diagonal D

16. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (-11x - 10y + 5z, 4y, -15x - 10y + 9z)$, hallar:

- la matriz asociada a la transformación

- b) la ecuación característica y los valores propios
- c) la matriz de Paso o diagonalizante C
- d) la matriz diagonal D

17. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (-2x + y, kz, x - y + 3z)$, hallar $k \in \mathbb{R}$ para que $\lambda = -3$ sea autovalor de la transformación y determinar el subespacio de autovectores asociados

18. ¿Cómo debe ser una matriz para que sea diagonalizable ortogonalmente? ¿Las matrices simétricas son siempre diagonalizables? ¿Si tiene multiplicidad algebraica, se puede predecir sin hacer cálculos si es diagonalizable o no?

19. Diagonaliza las siguientes matrices simétricas

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

20. Verifica el teorema que dice: Si A es una matriz simétrica, entonces cualesquiera de sus autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ no es simétrica. Demuestra que no es diagonalizable ortonormalmente

22. Encuentra una matriz simétrica de 2×2 con $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ y autovectores ortogonales correspondientes a $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ECUACIÓN COMPLETA DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

En la Unidad 2 hemos realizado el estudio de las cónicas a partir de una ecuación de segundo grado, donde el término xy (producto cruzado era igual a cero, ya que los ejes de simetría coincidían o eran paralelos a los ejes coordenados), en esta unidad vamos a realizar el estudio, pero con la ecuación completa de segundo grado

$$\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{\text{Forma cuadrática}} + \underbrace{dx + ey + f}_{\text{Forma lineal}} = 0$$

donde

- si $b = d = e = 0$, la cónica se encuentra en posición normal o estándar en relación a los ejes coordenados, porque los ejes de simetría corresponden a los ejes coordenados y el centro o el vértice coincide con el origen de coordenadas.
- si $b = 0$, pero $d \neq e \neq 0$ la ecuación representa una cónica trasladada. El centro se encuentra trasladado y los ejes son paralelos a los ejes coordenados
- si $d = e = 0$ y $b \neq 0$ es decir figura el término xy la cónica se encuentra rotada, es decir tiene los ejes girados respecto de los ejes coordenados, pero no hay traslación

Si la cónica se encuentra entonces rotada o trasladada la idea es llevarla a la forma canónica. Para ello es necesario eliminar el término “ xy ” o sea el producto cruzado, mediante transformación de coordenadas. Analizaremos dicha transformación de rotación.

ROTACIÓN DE CÓNICAS

La ecuación $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ se puede expresar en forma matricial de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Si $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ matriz simétrica y $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$, queda

$$X^T A X + K X + F = 0 \quad (1)$$

La matriz A es simétrica y por lo tanto tiene autovalores reales y puede diagonalizarse ortogonalmente a través de una matriz Q ortogonal, que está formada por los autovectores normalizados de A .

El proceso general para llevar una cónica a su forma estándar, si el coeficiente $b \neq 0$, es tomar un nuevo sistema de coordenadas, eliminando el término “ xy ” que corresponde a la rotación.

Si se giran los ejes coordenados un ángulo α , entonces todo punto del plano tiene dos representaciones (x, y) en el sistema original y (x', y') en el nuevo sistema. Lo mismo sucede con los vectores, todo vector en el plano, tiene dos representaciones:

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ en el sistema original de coordenadas

$\vec{v} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$ en el nuevo sistema.

Para determinar las relaciones entre x e y de un sistema y x' e y' del nuevo sistema, deduciremos las relaciones entre \hat{i} y \hat{j} e \hat{i}' y \hat{j}'

$$\hat{i}' = \cos\alpha \hat{i} + \sin\alpha \hat{j}$$

$$\hat{j}' = -\sin\alpha \hat{i} + \cos\alpha \hat{j}$$

Entonces substituyendo en $\vec{v} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}'$ nos quedaría

$$\vec{v} = x'(\cos\alpha \hat{i} + \sin\alpha \hat{j}) + y'(-\sin\alpha \hat{i} + \cos\alpha \hat{j})$$

$$\vec{v} = (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\hat{i} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\hat{j}$$

Entonces como $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad \text{Ecuación de rotación}$$

en forma matricial nos quedaría

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \rightarrow \text{si } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$X = Q X' \quad X' \text{ (rotación antihoraria)} \quad (2)$$

$$X^T = (Q X')^T$$

$$X^T = X'^T Q^T$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene la ecuación de la cónica no rotada en los nuevos ejes x' , y'

$$X'^T Q^T A Q X' + K Q X' + F = 0 \quad \text{donde } Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$X'^T D X' + K Q X' + F = 0$$

Los autovalores λ_1 y λ_2 no puede ser ambos nulos porque las dos matrices son semejantes

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \text{ si } \lambda_1 = \lambda_2 = 0; A \text{ sería una matriz nula}$$

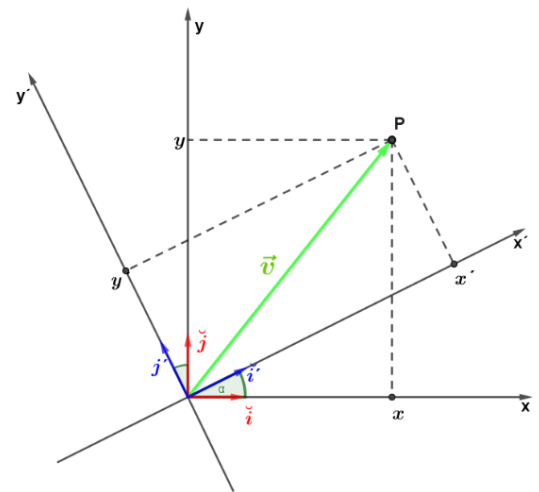
Teniendo presente por propiedades de matrices semejantes que $|A| = |D|$ entonces $ac - \frac{b^2}{4} = \lambda_1 \lambda_2$

se distinguen tres casos, que se pueden analizar o bien calculando el $|A|$ o analizando el $|D|$

CASO I: $|D| = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ Los autovalores tienen el mismo signo. Es una cónica tipo elíptico: una circunferencia real, una elipse real, una cónica degenerada (punto) o no existe lugar geométrico.

CASO II: $|D| = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ Los autovalores tienen \neq signo. Es una cónica tipo hiperbólico: una hipérbola real o hipérbola degenerada (par de rectas concurrentes) o no existe lugar geométrico.

CASO III: $|D| = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ es una cónica tipo parabólico. Uno de los autovalores es nulo: una parábola real o parábola degenerada (par de rectas paralelas) o no existe lugar geométrico.



1. Analiza de qué cónica se trata, grafica.

$$x^2 + 4xy + y^2 = 1$$

Se puede analizar el $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0 \rightarrow$ tenemos una cónica de tipo hiperbólico

El otro análisis exige el cálculo de los autovalores A, haciendo $\det(A - \lambda I) = 0$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3; \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$\lambda_1 \lambda_2 = -3 < 0 \rightarrow$ es una cónica de tipo hiperbólico

La expresión matricial de $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ es

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

$$X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = 1 \text{ haciendo el cambio de coordenadas } \begin{cases} X = QX' \\ X^T = (QX')^T \\ X^T = X'^T Q^T \end{cases}$$

$$X'^T Q^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} QX' = 1 \rightarrow X'^T \mathbf{D} X' = 1$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{3}} - y'^2 = 1$$

Donde $x' y'$ son las coordenadas del vector (x, y) en una base ordenada ortonormal (Q) constituida por los autovectores de A correspondientes a $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. **Para hallar los ejes de la hipérbola, basta hallar dicha base.**

Los vectores propios de A son las soluciones $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\text{Para } \lambda_1 = 3 \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow -2x + 2y = 0 \rightarrow x = y \rightarrow E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2x + 2y = 0 \rightarrow x = -y \rightarrow E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

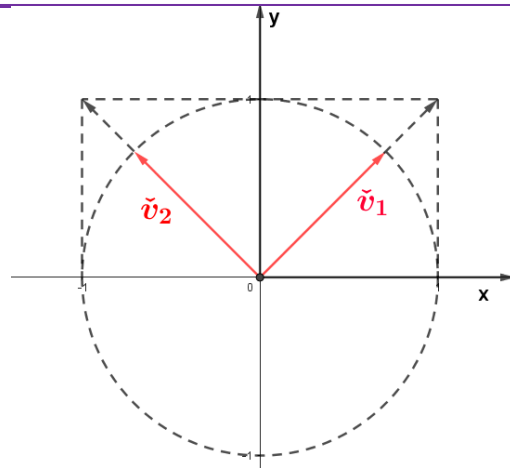
Los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 forman una base ortogonal de \mathbb{R}^2 , . Para obtener una base ortonormal de vectores propios (Q), debemos normalizar los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 o sea dividirlos por sus módulos. Se obtiene así:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |\vec{v}_1| = \sqrt{2}, \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

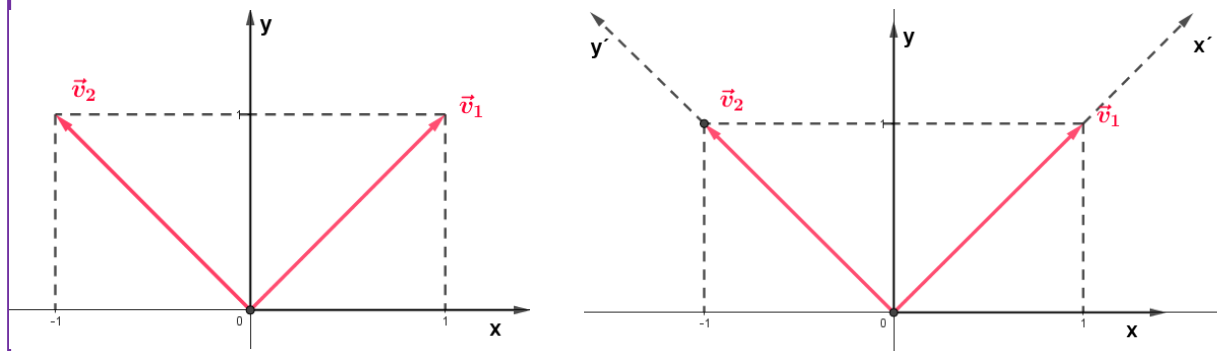
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, |\vec{v}_2| = \sqrt{2}, \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Eje x' Eje y'

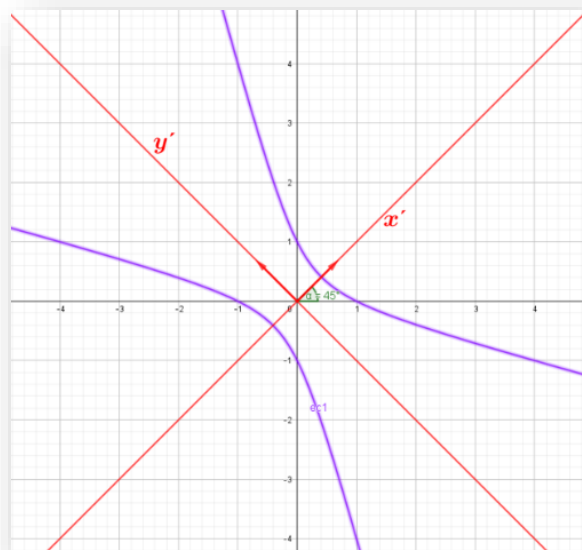


Respecto a las variables x' e y' , los versores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 juegan el mismo papel que los versores de la base canónica respecto de las variables x y y . Podemos decir que la base ordenada ortonormal Q se obtiene girando oportunamente la base ordenada estándar. Pero como sólo importa la dirección de los nuevos ejes x' e y' , alcanzaría para graficar los nuevos ejes los valores de \vec{v}_1 y



Los nuevos ejes x' e y' están en la dirección de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , respectivamente, y se obtienen girando adecuadamente los ejes x, y

Ahora podemos graficar la hipérbola cuyo semi eje real es el eje x' $\frac{1}{\sqrt{3}}$



2) Dada la ecuación cuadrática $5x^2 + kxy + 5y^2 + 4x + 4y = 0$

a) Escribe la misma en forma matricial

b) Determina el intervalo de k para que dicha ecuación resulte:

b.1 una elipse

b.2 una parábola

b.3 una hipérbola

c) para $k = -6$ obtén la ecuación canónica, indicando de qué cónica se trata, realiza un análisis detallado de cada uno de los pasos

d) indica la dirección de los nuevos ejes y grafica la cónica sobre dichos ejes

Solución

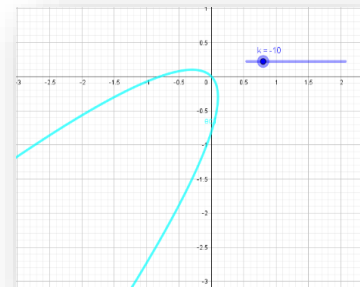
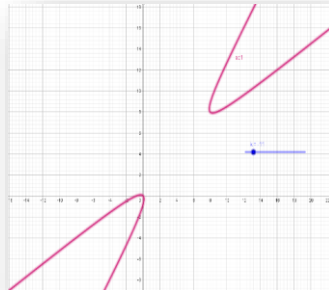
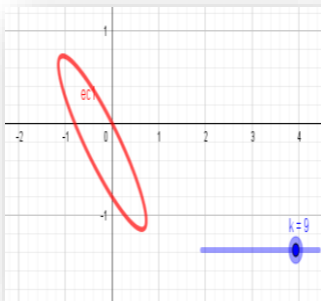
a) $5x^2 + kxy + 5y^2 + 4x + 4y = 0$

Como hay términos en xy hay una rotación $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

b) Analizamos el determinante para ver de qué cónica se trata

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 5 \end{vmatrix} = 25 - \frac{k^2}{4} \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} 0 \rightarrow 100 - k^2 \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} 0$$

Det A > 0	Det A < 0	Det A = 0
$100 - k^2 > 0$ $-10 < k < 10$ ($k \neq 0$)	$100 - k^2 < 0$ $k > 10 \vee k < -10$	$100 - k^2 = 0$ $k = 10$ rectas //, $k = -10$



c) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 4x + 4y = 0$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$X^T A X + KX + F = 0 \quad (1) \quad \text{sustituyendo en (1)} \quad \begin{cases} X = QX' \\ X^T = (QX')^T \\ X^T = X'^T Q^T \end{cases}$$

Nos queda la ecuación de una cónica en el nuevo sistema $x'y'$

$$X'^T Q^T A Q X' + K Q X' = 0 \quad \text{donde} \quad Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$X'^T D X' + K Q X' = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0$$

Debemos calcular entonces dos matrices, la matriz diagonal **D** compuesta por los autovalores y la matriz **Q** compuesta por los autovectores normalizados de A.

Cálculo de los autovalores $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2 \wedge \lambda_2 = 8$$

Para hallar los autovectores, se plantea $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ para cada uno de los autovalores hallados.

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 2$ $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 3x - 3y = 0 \rightarrow x = y$

El espacio solución será $E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}\right\}$, luego un autovector para $\vec{v}_1 = (1,1)$

Para $\lambda_2 = 8$ $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 3x + 3y = 0 \rightarrow x = -y$

El espacio solución será $E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}\right\}$, luego un autovector para $\vec{v}_2 = (-1,1)$

La matriz Q estará formada por los autovectores normalizados hallados, es la matriz de rotación

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightarrow Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$|Q| = 1$ se trata de una rotación en sentido antihorario

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$2x'^2 + 8y'^2 + \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0 \rightarrow 2x'^2 + 8y'^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}x' = 0$$

$$2x'^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}x' + 8y'^2 = 0 \text{ completando cuadrados}$$

$$2\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + 2 - 2\right) + 8y'^2 = 0$$

$$2\left(x' + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8y'^2 = 4$$

$$\frac{\left(x' + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1 \rightarrow \frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} = 1$$

$$a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

- d) La dirección de los nuevos ejes va a estar dada por los autovectores $\vec{v}_1 = (1,1)$ $\vec{v}_2 = (-1,1)$

Pero sabiendo que Q es igual a una matriz de rotación, se puede también girar en sentido antihorario el ángulo θ correspondiente y marcar los ejes rotados

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = 45^\circ$$

Para graficar la elipse vamos a encontrar las coordenadas del C y de los vértices mayores y menores en el sistema xy sabiendo que $X = QX'$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En los ejes rotados los vértices mayores serán $V(h \pm a, 0) \rightarrow V_1\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $V_2(0,0)$

En el sistema xy

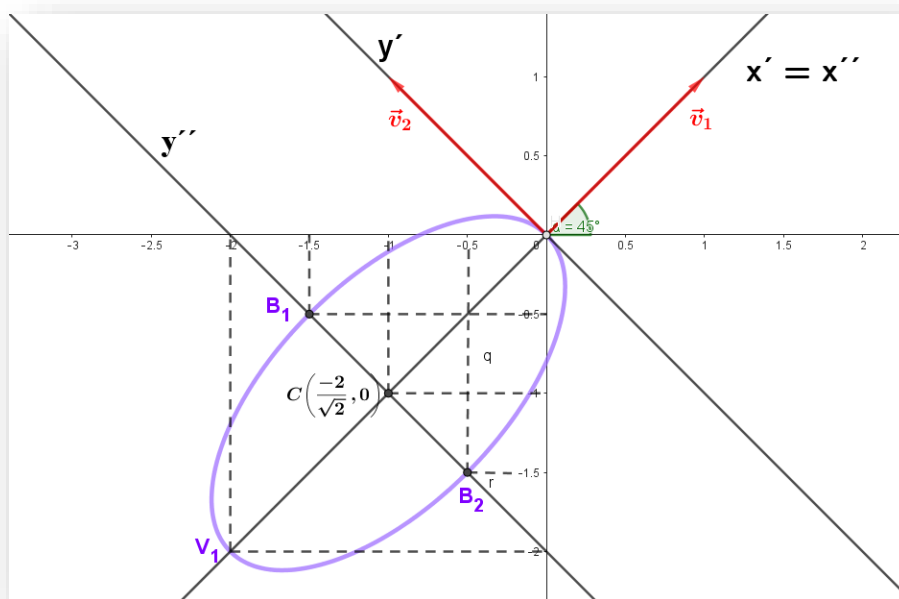
$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} ; V_2(0,0)$$

En los ejes rotados los vértices menores serán $(h, k \pm b) \rightarrow \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

En el sistema xy

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Graficando los ejes, el centro y los vértices se puede hacer el trazado de la elipse.



3. Dada la siguiente ecuación $x^2 + (2k - 4)xy + y^2 = 1$ encuentra el valor de k para que la ecuación represente un par de rectas

Solución: Las cónicas que degeneran en un par de rectas son las hipérbolas y las parábolas, observamos que no hay términos lineales en x e y por lo tanto no hay traslación únicamente rotación

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & k-2 \\ k-2 & 1 \end{bmatrix}$

para que sea una cónica de tipo parabólico el $|A| = 0 \rightarrow 1 - (k-2)^2 = 0 \rightarrow (k-2)^2 = 1$

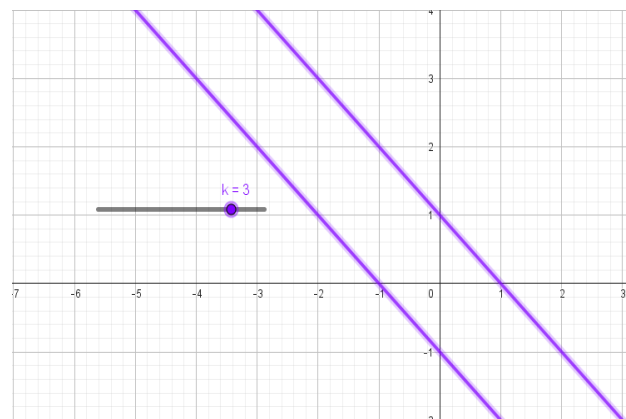
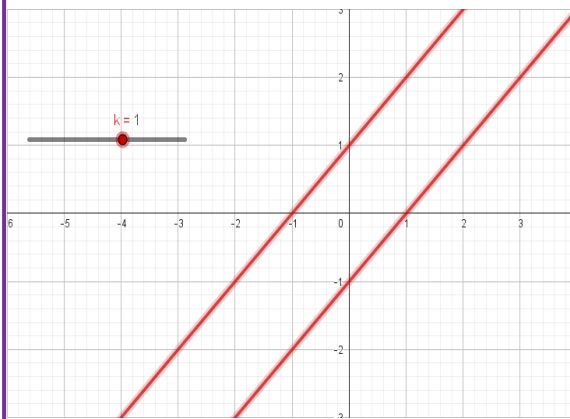
$$k = 1 \wedge k = 3$$

Si $k = 1 \rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 1 \rightarrow (x - y)^2 = 1$

tenemos dos rectas paralelas $x - y = 1 \wedge x - y = -1$

Si $k = 3 \rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1 \rightarrow (x + y)^2 = 1$

tenemos dos rectas paralelas $x + y = 1 \wedge x + y = -1$



Para que sea una cónica de tipo hiperbólico $|A| < 0 \rightarrow 1 - (k-2)^2 < 0 \rightarrow (k-2)^2 > 1$

$k > 3 \wedge k < 1$. Para que la hipérbola degenera en un par de rectas concurrentes, el término independiente debe ser cero, cosa que no ocurre en este caso.

El ejercicio 3 también se podría resolver de la manera como se venía trabajando

$$x^2 + (2k - 4)xy + y^2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k-2 \\ k-2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

$$X^T A X = 1 \quad (1) \quad \text{sustituyendo en (1)} \quad \begin{cases} X = QX' \\ X^T = (QX')^T \\ X^T = X'^T Q^T \end{cases}$$

Nos queda la ecuación de una cónica en el nuevo sistema $x'y'$

$$X'^T Q^T A Q X' = 1 \quad \text{donde} \quad Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$X'^T D X' = 1$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1 \rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1 \quad (2)$$

Cálculo de los autovalores $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & k-2 \\ k-2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (k-2)^2 = 0 \rightarrow (1-\lambda) = |k-2| = (k-2)^2 \rightarrow$$

$$\lambda_1 = -k + 3 \wedge \lambda_2 = k - 1 \quad \text{sustituyendo en (2)}$$

$$(-k + 3)x'^2 + (k - 1)y'^2 = 1$$

Como se busca un par de rectas paralelas, una de las variables cuadráticas deben ser nulas

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow 2y'^2 = 1$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow 2x'^2 = 1$$

Para graficar es necesario el cálculo de los autovectores que nos darán las direcciones de los ejes rotados.

TRABAJO PRACTICO ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

- 1) Sea $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Calcula $X^T A X$ para las siguientes matrices
 - a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
 - b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
- 2) Dadas las siguientes ecuaciones escribe esta forma cuadrática como $X^T A X$
 - a) $2x^2 + xy + 7y^2$
 - b) $3x^2 + 3xy$
 - c) $3x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 6xz + yz$
 - d) $x^2 - z^2 + 2xy - xz + yz$
 - e) xy
- 3) Dadas las siguientes ecuaciones escribe esta forma cuadrática como $X^T A X + KX + F$
 - f) $2x^2 + xy + 7y^2 + 2x - y + 8$
 - g) $3x^2 + 4xy - y^2 + y$
 - h) $3x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 6xz + yz + 8x + y - z + 2$
 - i) $xy + 8$ (en \mathbb{R}^2)
- 4) Aplicando transformación de coordenadas describe y representa las cónicas siguientes:
 - a) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$
 - b) $x^2 - 2xy + y^2 - 8 = 0$
 - c) $xy + 1 = 0$
 - d) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y - 24 = 0$
 - e) $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 4yz = 100$
- 5) Hallar el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 + 2kxy = 1$ represente un par de rectas
- 6) Determinar la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x + y - 6 = 0$ y por foco el origen de coordenadas. Expresar la solución en su forma canónica
- 7) Dada la ecuación $16x^2 + 9y^2 + kxy + 50x - 100y + 50 = 0$, hallar k de manera que la ecuación corresponda a una parábola